Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева»

Е.И. Ганжа, С.П. Царев

Классические методы интегрирования гиперболических систем и уравнений второго порядка

Учебное пособие

Красноярск 2007

ББК 22.161.1
Г19

Печатается по решению редакционно-издательского совета ГОУ ВПО «Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева»

Рецензенты:
Кандидат физико-математических наук, доцент СФУ
Ю.В. Шанько
Доктор физико-математических наук, профессор СФУ
О.В. Капцов
Ответственный за выпуск:
Доктор педагогических наук, профессор КГПУ
Л.В. Шкерина

Г19

Ганжа Е.И., Царев С.П. **Классические методы интегрирования гиперболических систем и уравнений второго порядка**: учебное пособие / Е.И. Ганжа[1], С.П. Царев[1]; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева.— Красноярск, 2007.— 118 с.

Предназначено для студентов IV–V курсов математического факультета КГПУ и содержит теоретический материал и задачи для спецкурса по теории дифференциальных уравнений в частных производных.

ISBN 978-5-85981-269-1 ББК 22.161.1

[1] *Работа получила финансовую поддержку гранта РФФИ 06-01-00814*

ВВЕДЕНИЕ

В курсе обыкновенных дифференциальных уравнений большая часть отведена интегрированию отдельных видов уравнений с помощью каких-то специальных приемов, замен и преобразований.

Теория уравнений в частных производных тоже развивалась вначале по этому пути. Это видно из трудов Лапласа, Дарбу, Ли, Якоби, Гурса и др. Потом их деятельность была забыта. Усилия переносятся на доказательство теорем типа существования и единственности. Вводятся новые пространства функций, обобщенные функции, доказываются глубокие результаты функционального анализа, развиваются численные методы.

В 60-е гг. XX в. было распространено мнение, что явное интегрирование для практических целей не нужно, т.к. считалось, что все необходимое можно найти численно на компьютере. Оказалось, однако, что далеко не все можно посчитать численно. В 70-е гг. вновь появляются интересные и важные результаты о явном интегрировании уравнений, возникающих в различных задачах математической физики, физики плазмы и т.п. Эти результаты часто являлись переоткрытиями уже созданных классиками, но забытых теорий. Некоторые простейшие классические методы явного интегрирования уравнений в частных производных мы и рассмотрим. Также приводятся результаты, полученные авторами недавно [4, 5, 6, 7, 41]. В первой части пособия мы воспользовались современным изложением каскадного метода Лапласа, приведенным в [11].

Учебное пособие может служить основой для чтения специальных курсов. Приведенные в тексте задачи можно использовать как темы для курсовых и дипломных работ. Изучение указанных в списке литературы оригинальных работ классиков и современных авторов, дополняющих и обобщающих метод Лапласа, может стать хорошей основой для самостоятельной научной работы.

1. Волновое уравнение

Уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \tag{1.1}$$

называется уравнением свободных колебаний струны или одномерным волновым уравнением. Уравнение (1.1) описывает следующую математическую модель. Пусть имеется «идеальная» бесконечная струна. Это означает, что:

1) мы пренебрегаем толщиной струны, которую мы считаем бесконечно малой по сравнению с ее длиной;

2) считаем, что струна абсолютно гибкая;

3) все точки струны движутся перпендикулярно оси OX в одной плоскости и эти колебания малы по сравнению с длиной струны;

4) струна однородная.

Тогда колебания «идеальной» струны задаются функцией $u(x,t)$, где u — отклонение точки струны с абсциссой x в момент времени t от положения покоя (см. рис. 1).

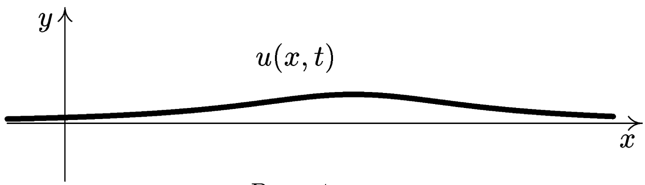

Рис. 1

Можно показать, что при сделанных предположениях функция $u(x,t)$ удовлетворяет (1.1), где a — постоянная, зависящая от натяжения струны и ее плотности.

Найдем полное решение уравнения (1.1). Для этого сделаем замену переменных.

Положим $\xi = x + at$, $\eta = x - at$. Дифференцируя сложную функцию, получим $u_t = u_\xi \cdot \xi_t + u_\eta \cdot \eta_t = au_\xi - au_\eta$, $u_{tt} = a(u_{\xi\xi}\xi_t + u_{\xi\eta}\eta_t - u_{\eta\xi}\xi_t - u_{\eta\eta}\eta_t) = a(au_{\xi\xi} + au_{\eta\eta}) = a^2(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta})$, $u_x = u_\xi + u_\eta$, $u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$.

Подставив это в уравнение (1.1), имеем $a^2(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) = a^2(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})$ или

$$u_{\xi\eta} = 0. \tag{1.2}$$

Найдем общее решение этого уравнения. Замечаем, что произвольные функции $\varphi(\xi)$, $\psi(\eta)$ будут решениями (1.2); в силу линейности функция $u(x,t) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$ — также его решение. Покажем, что любое решение (1.2) имеет такой вид. Пусть $u(x,t)$ — произвольное решение (1.2). Обозначим $u_\xi = v$, тогда (1.2) эквивалентно $v_\eta = 0$, или $v = c_1(\xi)$. Отсюда $u_\xi = c_1(\xi) \Rightarrow u = \int c_1(\xi)d\xi + c_2(\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$. Итак, общее решение (1.1) есть

$$u = \varphi(x + at) + \psi(x - at), \tag{1.3}$$

где φ, ψ — произвольные дважды дифференцируемые функции. На рис. 2, 3, 4 схематично изображен график функции $u(x,t)$ в различные моменты времени t. Он является суммой двух бегущих в противоположных направлениях волн. Для наглядности начальные возмущения $\varphi(x)$, $\psi(x)$ при $t = 0$ имеют вид «горбиков»:

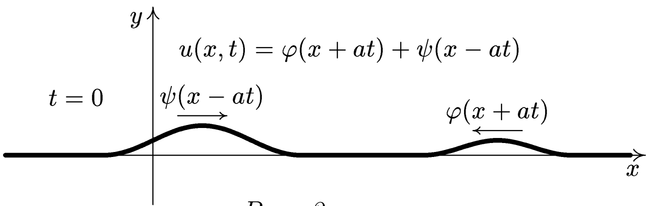

Рис. 2

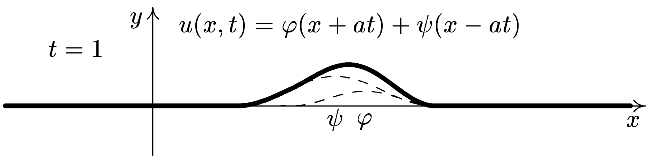

Рис. 3

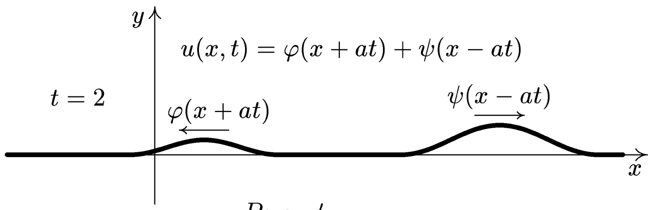

Рис. 4

Теперь рассмотрим полубесконечную струну, один конец которой A прикреплен к неподвижной опоре (рис. 5).

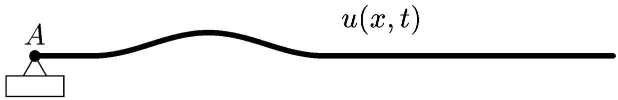

Рис. 5

Это означает, что $u(x,t)$ определена лишь при $x \geqslant 0$ и $u(0,t) = 0$, $\forall t$. Подставив $x = 0$ в (1.3), получаем $\varphi(z) = -\psi(-z)$, $z = at$ и обратно: если $\varphi(z) = -\psi(-z)$, то $u(0,t) \equiv 0$. При этом $\varphi(z)$, $\psi(z)$ должны быть определены при любом значении аргумента z. Формула (1.3) позволяет формально определить $u(x,t)$ также при $x < 0$. Причем мы получаем $u(-x,t) = \varphi(-x+at) + \psi(-x-at) = -\psi(x-at) - \varphi(x+at) = -u(x,t)$. Говоря в физических терминах, мы можем продлить струну влево до бесконечности, т.е. добавить воображаемую вторую половину, считая функцию $u(x,t)$ нечетной по x. Таким образом, мы свели случай полубесконечной закрепленной струны к предыдущему. Данные рассуждения можно строго обосновать. Рассмотрим теперь для закрепленной струны волну, движущуюся по струне влево по направлению к закрепленному концу.

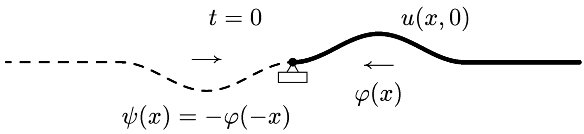

Рис. 6

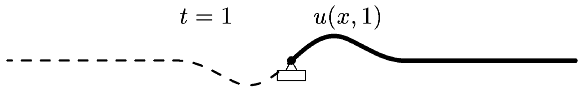

Рис. 7

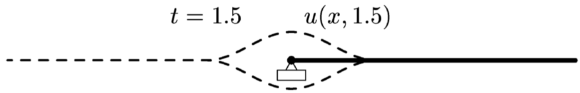

Рис. 8

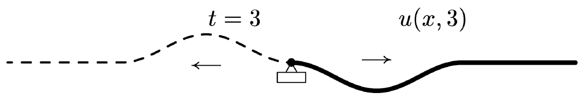

Рис. 9

На рис. 6–9 показано поведение решения $u(x, t)$ в последовательные моменты времени. Мы видим, что воображаемая волна, движущаяся направо при $t = 0$, затем превращается в реальную отраженную волну. Легко убедиться на практике, что именно так ведет себя длинный шнур с закрепленным концом. Если дернуть за свободный конец, то волна дойдет до закрепленной точки, отразится и, изменив знак, вернется назад.

Внешне сходным с (1.1) является уравнение

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{1.4}$$

Его решения описывают, в частности, электростатические потенциалы, стационарные течения несжимаемой жидкости, стационарные температурные поля и многие другие физические явления. Однако методы решения (1.4) коренным образом отличаются от рассмотренного выше метода решения (1.1) и требуют применения комплексного анализа (см. [18]); явно решения выписываются лишь в интегральном виде (см., например, [19]).

2. Канонический вид линейного уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными

Рассмотрим задачу упрощения общего линейного уравнения в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными вида

$$\begin{aligned} &A(x,y)u_{xx} + B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + \\ &\quad D(x,y)u_x + E(x,y)u_y + F(x,y)u_x + G(x,y) = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Сделаем произвольную локально обратимую замену независимых переменных

$$\zeta = \zeta(x,y), \quad \eta = \eta(x,y), \quad \zeta_x\eta_y - \eta_x\zeta_y \neq 0; \tag{2.2}$$

тогда (2.1) перейдет в уравнение

$$\begin{aligned} &A_1(\zeta,\eta)u_{\zeta\zeta} + B_1(\zeta,\eta)u_{\zeta\eta} + C_1(\zeta,\eta)u_{\eta\eta} + \\ &\quad D_1(\zeta,\eta)u_\zeta + E_1(\zeta,\eta)u_\eta + F_1(\zeta,\eta)u_\zeta + G_1(\zeta,\eta) = 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

коэффициенты которого имеют вид

$$
\begin{aligned}
&A_1 = A\zeta_x^2 + B\zeta_x\zeta_y + C\zeta_y^2,\\
&B_1 = 2A\zeta_x\eta_x + B(\zeta_x\eta_y + \zeta_y\eta_x) + 2C\zeta_y\eta_y,\\
&C_1 = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2,\\
&D_1 = A\zeta_{xx} + B\zeta_{xy} + C\zeta_{yy} + D\zeta_x + E\zeta_y,\\
&E_1 = A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y,\\
&F_1 = F,\\
&G_1 = G.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Подразумевается, что после вычисления производных по x, y в данных формулах x и y заменены на ζ, η в силу (2.2). Попробуем избавиться от слагаемых с $u_{\eta\eta}$ и $u_{\zeta\zeta}$, приравняв нулю $A_1 = A\zeta_x^2 + B\zeta_x\zeta_y + C\zeta_y^2 = 0$, $C_1 = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 = 0$. Рассмотрим два случая:

Случай I: $A = 0$. Тогда $\zeta_y(B\zeta_x + C\zeta_y) = 0$, $\eta_y(B\eta_x + C\eta_y) = 0$. Следовательно, либо $\zeta_y = 0$, либо $B\zeta_x + C\zeta_y = 0$. Аналогично $\eta_y = 0$ либо $B\eta_x + C\eta_y = 0$. В силу невырожденности замены (2.2) получаем, что возможны два подслучая: $\zeta_y = 0$ и $\zeta_x/\zeta_y = -C/B$; либо $\eta_y = 0$ и $\eta_x/\eta_y = -C/B$. Эти случаи фактически совпадают: достаточно переименовать ζ и η.

Случай II: $A \neq 0$. Тогда $\zeta_y \neq 0$ (и $\eta_y \neq 0$), поскольку в противном случае мы бы получили $C_1 = A\eta_x^2 = 0$, т.е. $\eta_x = 0$ (соответственно $\zeta_x = 0$), что противоречит обратимости замены переменных, разделив на η_y^2 и ζ_y^2, получим $Aw^2 + Bw + C = 0$, где w обозначает отношения η_x/η_y и ζ_x/ζ_y, которые тем самым есть два корня этого квадратного уравнения. Видим, что для существования такой упрощающей замены (2.2) нужна вещественность и различность корней w_1, w_2, т.е.

$$\Delta_1(x, y) = B_1^2(x, y) - 4A_1(x, y)C_1(x, y) > 0. \tag{2.5}$$

Уравнения (2.1), удовлетворяющие (2.5), называются **гиперболическими**. Только такие уравнения мы и будем изучать. К ним относится волновое уравнение в формах (1.1) и (1.2). Очевидно,

$$\Delta_1(x, y) = B_1^2(x, y) - 4A_1(x, y)C_1(x, y) = \Delta(x, y)(\zeta_x\eta_y - \eta_x\zeta_y)^2. \tag{2.6}$$

Следовательно, свойство гиперболичности сохраняется при любых заменах (2.2). Уравнение (1.4) не является гиперболическим, оно относится к другому классу — классу эллиптических уравнений.

Убедимся, что решение $\eta(x,y)$ уравнения $\eta_x/\eta_y = w_1 = \frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$ постоянно на кривых $y = y(x,C)$ — решениях обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}. \tag{2.7}$$

Эти кривые образуют первое семейство **характеристик** уравнения (2.1). Действительно:

$$\frac{d\eta}{dx} = \eta_x+\eta_y\frac{dy}{dx} = \eta_y\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}+\eta_y\frac{B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A} = 0.$$

Аналогично $\zeta(x,y)$ (решение уравнения $\zeta_x/\zeta_y = w_2 = \frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$) постоянно на втором семействе характеристик

$$\frac{dy}{dx} = w_2 = \frac{B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}. \tag{2.8}$$

Покажем теперь, как, зная характеристики (для чего требуется решать лишь обыкновенные дифференциальные уравнения (2.7), (2.8)), можно найти решения уравнений 1-го порядка в частных производных $\eta_x/\eta_y = w_1$, $\zeta_x/\zeta_y = w_2$, то есть замену (2.2). Обозначим общее решение обыкновенного дифференциального уравнения (2.7) через $y = y(x,C)$. Выразим из него $C = C(x,y)$ и положим $\zeta(x,y) = C(x,y)$. Тем самым $\zeta(x,y)$ постоянно на решениях $y(x,C)$ уравнения (2.7), следовательно $\zeta_x + \zeta_y \cdot dy/dx = 0$, т.е. $dy/dx = -\zeta_x/\zeta_y$. Аналогично, выразим константу C_1 из общего решения $y(x,C_1)$ уравнения (2.8) и положим $\eta(x,y) = C_1(x,y)$. Легко проверить, что в координатах $\zeta(x,y)$, $\eta(x,y)$, выбранных указанным образом, выполняются равенства $A_1 = C_1 = 0$. Действительно:

$$A_1 = A\zeta_x^2 + B\zeta_x\zeta_y + C\zeta_y^2 = \zeta_y^2\big(A\big(\frac{dy}{dx}\big)^2 - B\frac{dy}{dx} + C\big) = 0 \tag{2.9}$$

в силу (2.7). Аналогично $C_1 = 0$ в силу (2.8).

Подведем итог: любое гиперболическое уравнение (2.1) заменой (2.2) приводится к каноническому виду

$$u_{\zeta\eta} + a(\zeta,\eta)u_\zeta + b(\zeta,\eta)u_\eta + c(\zeta,\eta)u = f(\zeta,\eta), \tag{2.10}$$

$a = D_1/B_1$, $b = E_1/B_1$, $c = F_1/B_1$, $f = G_1/B_1$. Очевидно,$B_1 \neq 0$, т.к. в противном случае (2.3) становится уравнением первого порядка; совершая обратную замену, получаем, что и (2.1) не могло содержать членов 2-го порядка.

Для уравнения канонического вида

$$u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y), \tag{2.11}$$

характеристиками, очевидно, служат прямые, параллельные осям координат. Легко видеть, что из всех преобразований (2.2) такие прямые переходят в себя только при преобразованиях вида

$$\varphi = \varphi(x), \quad \psi = \psi(y). \tag{2.12}$$

Такие преобразования сохраняют класс уравнений (2.11) и могут быть использованы для дальнейшего упрощения уравнения, приведенного к канонической форме. Общие формулы (2.4) показывают, что уравнение (2.11) в результате преобразования (2.12) переходит в уравнение

$$u_{\varphi\psi} + a_1(\varphi,\psi)u_\varphi + b_1(\varphi,\psi)u_\psi + c_1(\varphi,\psi)u = f_1(\varphi,\psi), \tag{2.13}$$

коэффициенты которого имеют вид

$$a_1 = \frac{a}{\psi'}, \quad b_1 = \frac{b}{\varphi'}, \quad c_1 = \frac{c}{\psi'\varphi'}, \quad f_1 = \frac{f}{\psi'\varphi'}. \tag{2.14}$$

Дальнейшее упрощение (2.11) получим, рассмотрев сдвиг

$$v(x,y) = u(x,y) - \gamma(x,y) \tag{2.15}$$

неизвестной функции $u(x,y)$ в уравнении (2.11) на некоторую заданную функцию $\gamma(x,y)$. Легко видеть, что новая неизвестная функция v удовлетворяет уравнению $v_{xy} + av_x + bv_y + cv =$

$f-(\gamma_{xy}+a\gamma_x+b\gamma_y+c\gamma)$. Отсюда видим, что если выбрать в качестве γ какое-нибудь решение $u_0(x,y)$ уравнения (2.11), то v удовлетворяет **однородному** каноническому уравнению (т.е. уравнению с нулевой правой частью):

$$v_{xy}+av_x+bv_y+cv=0. \tag{2.16}$$

Поскольку нашей задачей является отыскание не какого-либо одного, а произвольного общего решения (2.11), в дальнейшем мы будем изучать только однородные уравнения (2.16). Это уравнение часто называют **уравнение Лапласа** (не путать с (1.4), которое называется так же!).

Применим к (2.16) следующее преобразование, сохраняющее независимые переменные x и y. А именно, заменим неизвестную функцию $v(x,y)$ новой неизвестной функцией w, связанной с v соотношением

$$v(x,y)=\lambda(x,y)w(x,y), \tag{2.17}$$

где λ — некоторый заданный множитель. Преобразованное уравнение приобретает вид

$$w_{xy}+a_1(x,y)w_x+b_1(x,y)w_y+c_1(x,y)w=0, \tag{2.18}$$

где

$$\begin{aligned}
&a_1=a+\tfrac{\lambda_y}{\lambda}=a+(\ln\lambda)_y,\\
&b_1=b+\tfrac{\lambda_x}{\lambda}=b+(\ln\lambda)_x,\\
&c_1=c+\tfrac{\lambda_{xy}}{\lambda}+a\tfrac{\lambda_x}{\lambda}+b\tfrac{\lambda_y}{\lambda}=c+a_1b_1-ab+(\ln\lambda)_{xy}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Эти формулы показывают, что для того, чтобы (2.16) и (2.18) были связаны преобразованием вида (2.17), необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\lambda(x,y)$, такая, что

$$a_1-a=(\ln\lambda)_y,\quad b_1-b=(\ln\lambda)_x,\quad c_1-c=a_1b_1-ab+(\ln\lambda)_{xy}.$$

Из этих соотношений видим, что

$$\frac{\partial(a_1-a)}{\partial x}=\frac{\partial(b_1-b)}{\partial y}=c_1-c-a_1b_1+ab,$$

т.е.

$$\frac{\partial a_1}{\partial x}+a_1b_1-c_1=\frac{\partial a}{\partial x}+ab-c,\ \frac{\partial b_1}{\partial y}+a_1b_1-c_1=\frac{\partial b}{\partial y}+ab-c. \quad (2.20)$$

Если условия (2.20) выполнены, определение множителя λ не представляет труда. А именно, заметив, что $\frac{\partial(b_1-b)}{\partial y}=\frac{\partial(a_1-a)}{\partial x}$ и выражение $(b_1-b)dx+(a_1-a)dy$ является полным дифференциалом, получаем для определения λ формулу

$$\lambda=\exp\int\big[(b_1-b)dx+(a_1-a)dy\big]. \quad (2.21)$$

Таким образом, мы доказали следующую лемму.

Лемма 2.1. *Для того, чтобы два канонических уравнения (2.16) и (2.18) были приводимы одно к другому мультипликативным преобразованием (2.17), необходимо и достаточно, чтобы величины*

$$h=a_x+ab-c,\quad k=b_y+ab-c \quad (2.22)$$

имели для обоих уравнений одно и то же значение.

Следствие 2.2. *Уравнение (2.16) заменой (2.17) сводится к уравнению $u_{xy}=0$, если и только если $h=k=0$.*

Согласно лемме 2.1, функции h, k являются (абсолютными) инвариантами группы мультипликативных преобразований вида (2.17). Их обычно называют **инвариантами Лапласа** уравнения (2.16).

Легко видеть, что инварианты h и k переходят один в другой при перестановке x и y. Выясним, как преобразуются h и k при заменах переменных вида (2.12). Дифференцируя две первые формулы (2.14), получаем

$$h_1=\frac{h}{\psi(x)'\varphi(y)'},\quad k_1=\frac{k}{\psi(x)'\varphi(y)'}. \quad (2.23)$$

Формулы (2.23), как принято говорить, означают, что h и k являются относительными инвариантами группы преобразований (2.12). Лемма 2.1 и формулы (2.23) показывают, что отношение инвариантов Лапласа h/k представляет собой абсолютный инвариант как для преобразований (2.17), так и для преобразований (2.12).

3. Преобразования Лапласа

Уравнение

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0 \tag{3.1}$$

можно записать в двух равносильных формах:

$$u_{xy}+au_x+bu_y+(a_x+ab-h)u = \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right)u - hu = 0,$$

$$u_{xy}+au_x+bu_y+(b_y+ab-k)u = \left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)u - ku = 0,$$

где h, k — инварианты Лапласа (2.22) уравнения (3.1). Поэтому (3.1) эквивалентно каждой из систем

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right)u = u_1, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)u_1 = hu, \tag{3.2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)u = u_{-1}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right)u_{-1} = ku. \tag{3.3}$$

Предположим, что инвариант $h \equiv 0$. Тогда второе уравнение из (3.2) имеет вид $(u_1)_x = -bu_1$, т.е. является обыкновенным линейным дифференциальным уравнением относительно неизвестной переменной функции u_1, зависящей от независимой переменной x и от параметра y. Интегрируя его и учитывая зависимость произвольной постоянной от параметра, получаем $u_1 = Y(y)\exp\left(-\int b\,dx\right)$. Подставляя u_1 в первое уравнение (3.2), имеем $u_y + au = Y(y)\exp\left(-\int b\,dy\right)$. Используя метод вариации постоянной, находим из него

$$u = \exp\left(-\int a\,dy\right)\left(X(x) + \int Y(y)\exp\left(\int(a\,dy - b\,dx)\right)dy\right),$$

где X — произвольная функция переменной x, а Y — переменной y.

При $k \equiv 0$ из (3.3) аналогичным образом получаем

$$u = \exp\left(-\int b\,dx\right)\left(Y(y) + \int X(x)\exp\left(\int(b\,dx - a\,dy)\right)dx\right).$$

В случае $h = k = 0$ уравнение (3.1) согласно следствию 2.2 сводится к уравнению $v_{xy} = 0$ мультипликативным преобразованием $u = \lambda(x,y)v$. Используя формулу (2.21) и известный вид общего решения волнового уравнения, получаем

$$u = \exp\left(-\int(b\,dx + a\,dy)\right)\big(X(x) + Y(y)\big).$$

Таким образом, если хотя бы один из инвариантов h, k тождественно равен нулю, то уравнение (3.1) интегрируется в квадратурах. К сожалению, редко оказывается, что $h \equiv 0$ или $k \equiv 0$. Однако и в более общей ситуации может оказаться полезной запись (3.1) в виде систем (3.2), (3.3), поскольку она позволяет преобразовать заданное уравнение Лапласа (3.1) в два других уравнения того же вида, одно из которых может иметь один из инвариантов Лапласа равным нулю.

Предположим, например, что $h \neq 0$, тогда можно совершить так называемое X-преобразование Лапласа по следующим формулам. Из второго уравнения (3.2) выражаем u через новую функцию u_1:

$$u = \frac{1}{h}\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)u_1. \tag{3.4}$$

Подставив это выражение вместо u в первое уравнение (3.2), получаем уравнение Лапласа на неизвестную функцию u_1:

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right)\frac{1}{h}\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)u_1 - u_1 = \\
&= \frac{1}{h}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y} - \frac{h_y}{h^2}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{b}{h}\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{b_y}{h}u_1 + \frac{a}{h}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{ab}{h}u_1 - \frac{h_y}{h^2}bu_1 - u_1 = \\
&= \frac{1}{h}\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y} + \left(a - \frac{h_y}{h}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x} + b\frac{\partial u_1}{\partial y} + \left(b_y + \left(a - \frac{h_y}{h}\right)b - h\right)u_1\right].
\end{aligned}$$

Аналогично, если $k \neq 0$, можно совершить Y-преобразование Лапласа, пользуясь уравнениями (3.3):

$$u = \frac{1}{k}\left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right) u_{-1}, \tag{3.5}$$

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)\frac{1}{k}\left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right) u_{-1} - u_{-1} =$$
$$= \frac{1}{k}\left[\frac{\partial^2 u_{-1}}{\partial x \partial y} + \left(b - \frac{k_x}{k}\right)\frac{\partial u_{-1}}{\partial y} + a\frac{\partial u_{-1}}{\partial x} + \left(a_x + \left(b - \frac{k_x}{k}\right)a - k\right)u_{-1}\right].$$

Обозначим результат X-преобразования Лапласа через E_1, а Y-преобразования — через E_{-1}. Запишем их в удобном для нас (универсальном) виде

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + a_1(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial x} + b_1(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial y} + c_1(x,y)u_1 = 0, \tag{E_1}$$

$$\frac{\partial^2 u_{-1}}{\partial x \partial y} + a_{-1}(x,y)\frac{\partial u_{-1}}{\partial x} + b_{-1}(x,y)\frac{\partial u_{-1}}{\partial y} + c_{-1}(x,y)u_{-1} = 0, \tag{E_{-1}}$$

где

$$\begin{gathered} a_1 = a - (\ln h)_y, \quad b_1 = b, \quad c_1 = a_1 b_1 + b_y - h \\ a_{-1} = a, \quad b_{-1} = b - (\ln k)_x, \quad c_{-1} = a_{-1}b_{-1} + a_x - k. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Используя (3.6), найдем инварианты Лапласа для уравнений (E_1), (E_{-1}):

$$\begin{gathered} h_1 = 2h - k - (\ln h)_{xy}, \quad h_{-1} = k \\ k_1 = h, \quad k_{-1} = 2k - h - (\ln k)_{xy}. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Если $h_1 \equiv 0$, то уравнение (E_1) интегрируется в квадратурах, а значит, по формуле $u = \frac{1}{h}\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)u_1$ находятся все решения исходного уравнения (3.1), которое будем далее обозначать (E_0). Аналогичным образом (E_0) интегрируется, если $k_{-1} \equiv 0$.

В случае же, если $h_1 \not\equiv 0$, то, применяя к (E_1) X-преобразование Лапласа, мы приходим к новому уравнению (E_2). Аналогично, если $k_{-1} \not\equiv 0$, то с помощью Y-преобразования мы, исходя из (E_{-1}), строим уравнение (E_{-2})

и т.д. Таким образом, мы имеем целую двустороннюю последовательность уравнений

$$\ldots,(E_{-3}),\ (E_{-2}),\ (E_{-1}),\ (E_0),\ (E_1),\ (E_2),\ (E_3),\ldots \qquad (3.8)$$

С ней связана двусторонняя последовательность инвариантов Лапласа

$$\ldots,h_{-3},\ h_{-2},\ h_{-1},\ h_0=h,\ h_1,\ h_2,\ h_3,\ldots \qquad (3.9)$$

Заметим, что нет необходимости выписывать дополнительно последовательность инвариантов k_i, поскольку из формул (3.7) видно, что $k_{i+1}=h_i$, $i=0,\pm1,\pm2,\ldots$. Принимая во внимание (3.7), получаем, что для цепочки инвариантов Лапласа h_i верна рекуррентная формула

$$h_{i+1}=2h_i-h_{i-1}-(\ln h_i)_{xy}, \qquad i\in\mathbb{Z}, \qquad (3.10)$$

позволяющая без нахождения самих уравнений (E_i) вычислять все инварианты h_i, исходя из «начальных значений» $h_{-1}=k$, $h_0=h$.

Кроме того, отметим, что, применив Y-преобразование Лапласа к уравнению (E_1), получим уравнение Лапласа с инвариантами h_0 и k_0, т.е. сводящееся к (E_0) мультипликативным преобразованием $(u_1)_{-1}=\lambda(x,y)u_0$. Легко показать, что коэффициент пропорциональности $\lambda(x,y)=h_0$. Аналогично, применив X-преобразование Лапласа к (E_{-1}), получим уравнение, сводящееся к (E_0) заменой $(u_{-1})_1=ku_0$. Таким образом, X- и Y-преобразования почти обратны друг другу. Поэтому, комбинируя их в произвольном порядке, мы получим лишь уравнения, эквивалентные (E_i) из (3.8), пока (может быть) мы не встретим уравнение, один из инвариантов которого тождественно равен нулю. Если, например, это $h_s\equiv0$ (или $k_s\equiv0$), формула (3.4) (соответственно (3.5) становится неприменимой, т.е. мы не сможем применить X-преобразование Лапласа (Y-преобразование) еще один раз и цепочка (3.8) обрывается на уравнении (E_s). Это и будет являться «хорошим» случаем: как мы отмечали выше, (E_s) интегрируется в квадратурах (один из инвариантов Лапласа равен нулю!). Применяя к полученному решению u_s уравнения (E_s) нужное число раз формулу (3.4) (соответственно (3.5)), находим полные решения всех уравнений (E_r), $0 \leqslant r < s$ (соответственно $0 \geqslant r > s$ в случае $s < 0$), и, в частности, полное решение исходного уравнения (E_0). Этот способ интегрирования и называется **каскадным методом Лапласа**.

Чтобы избежать возможного недоразумения, упомянем, что термин «преобразование Лапласа» употребляется в математическом анализе также в другом смысле, обозначая преобразование, аналогичное преобразованию Фурье функций.

4. Явные формулы для решений

Рассмотрим цепочку преобразований Лапласа некоторого уравнения (E_0): $\ldots, (E_{-n}), \ldots, (E_{-2}), (E_{-1}), (E_0), (E_1), (E_2), \ldots, (E_n), \ldots$, где (E_i) — уравнение, полученное из исходного уравнения (E_0) с помощью X-преобразования Лапласа, примененных i раз, а (E_{-i}) — уравнение, полученное из исходного уравнения (E_0) с помощью Y-преобразования Лапласа, примененных i раз, $i = 1, 2, \ldots$ В дальнейшем мы будем соответственно использовать обозначения

$$\frac{\partial u_i}{\partial x \partial y} + a_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + b_i \frac{\partial u_i}{\partial y} + c_i u_i = 0 \tag{E_i}$$

$$\frac{\partial u_{-i}}{\partial x \partial y} + a_{-i} \frac{\partial u_{-i}}{\partial x} + b_{-i} \frac{\partial u_{-i}}{\partial y} + c_{-i} u_{-i} = 0 \tag{E_{-i}}$$

В виде систем 1-го порядка уравнения (E_i) и (E_{-i}) записываются соответственно в виде

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial y} + a_i\right) u_i = u_{i+1} \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) u_{i+1} - h_i u_i = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial x} + b_{-i}\right) u_{-i} = u_{-i-1} \\ \left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right) u_{-i-1} - h_{-i-1} u_{-i} = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Отсюда получаем, что последовательные решения уравнений в цепочке преобразований Лапласа связаны формулами

$$u_i = \frac{1}{h_i}\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) u_{i+1}, \qquad i \geqslant 0, \tag{4.3}$$

$$u_s = \frac{1}{k_s}\left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right) u_{s-1}, \qquad s \leqslant 0. \tag{4.4}$$

Следовательно, $u = u_0$ выражается через u_n ($n \geqslant 1$) следующим образом:

$$u = \frac{1}{h}\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) \frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) \cdots \frac{1}{h_{n-1}}\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) u_n.$$

Поскольку $\dfrac{\partial}{\partial x} + b = e^{-\int b\,dx} \dfrac{\partial}{\partial x} e^{\int b\,dx}$, последнюю формулу можно переписать в виде

$$u e^{\int b\,dx} = \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x} \cdots \frac{1}{h_{n-1}}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_n e^{\int b\,dx}\right). \tag{4.5}$$

Аналогичным образом $u = u_0$ выражается через u_{-m}:

$$u e^{\int a\,dy} = \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{k_{-1}}\frac{\partial}{\partial y} \cdots \frac{1}{k_{1-m}}\frac{\partial}{\partial y}\left(u_{-m} e^{\int a\,dy}\right). \tag{4.6}$$

Предположим теперь, что $h_n \equiv 0$. Тогда, как отмечалось выше, уравнение (E_n) равносильно системе

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + a_n\right) u_n = u_{n+1}, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) u_{n+1} = 0.$$

Решая ее (см. стр. 15), получаем

$$u_n = e^{-\int a_n\,dy}\left(X(x) + \int Y(y) e^{\int (a_n dy - b dx)} dy\right), \tag{4.7}$$

где X и Y — произвольные функции x и y соответственно. Введем обозначения $\alpha = e^{-\int a_n\, dy}$, $\beta = e^{\int (a_n dy - b dx)}$, тогда

$$u_n = \alpha \left(X + \int Y \beta \, dy \right). \tag{4.8}$$

Подставив это выражение для u_n в (4.5), получаем

$$u = A\left(X + \int Y\beta dy\right) + A_1\left(X' + \int Y\beta_x dy\right) + \ldots + A_n\left(X^{(n)} + \int Y \frac{\partial^n \beta}{\partial x^n} dy\right),$$

где A, A_1, $\ldots$, A_n — заданные функции от x и y, а $X^{(m)}$ — производная порядка m произвольной функции $X(x)$. Так как Y — произвольная функция от y, то, полагая $Y = 0$, мы имеем следующее специальное решение:

$$u = AX + A_1 X' + \ldots + A_n X^{(n)}. \tag{4.9}$$

Итак, если инвариант n-го порядка h_n тождественно равен нулю, то исходное уравнение (E_0) вида (3.1) имеет специальное решение (4.9), где X — произвольная функция от x. Справедливо и обратное утверждение:

Лемма 4.1. *Пусть уравнение* (E_0) *вида* $u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0$ *имеет решение (4.9), где* $A(x,y)$, $A_1(x,y)$, $\ldots$, $A_n(x,y)$ *— заданные функции, а* $X(x)$ *— произвольная функция одного аргумента. Тогда найдется* m *(*$0 \leqslant m \leqslant n$*) такое, что инвариант Лапласа* h_m *уравнения* (E_m) *равен нулю.*

Доказательство. Будем доказывать утверждение леммы индукцией по порядку n специального решения. В случае $n = 0$ специальное решение имеет вид $u = AX$. После подстановки в уравнение получаем $(A_y + aA)X' + (A_{xy} + aA_x + bA_y + cA)X = 0$. В силу произвольности X отсюда следует, что $A_y + aA = 0$, $A_{xy} + aA_x + bA_y + cA = 0$. Выражая A_y из первого соотношения и подставляя во второе, получаем, что $0 = -(aA)_x + aA_x - baA + cA = -hA$, откуда $h = 0$.

Пусть для $s \leqslant n-1$ утверждение верно (для любого уравнения вида (E_0)). Покажем, что оно выполняется для $s=n$.

Подставляя в уравнение (E_0) решение (4.9), получаем соотношение вида $B_{n+1}X^{(n+1)} + B_nX^{(n)} + \ldots + B_0X = 0$, где $B_{n+1} = (A_n)_y + aA_n$. Так как X — произвольная функция от x, то $B_{n+1} = 0$ или $(A_n)_y + aA_n = 0$. Предположим, что инвариант h уравнения (E_0) не равен нулю (в противном случае лемма доказана). Тогда к уравнению (E_0) можно применить X-преобразование Лапласа. Полученное уравнение (E_1) также обладает специальным решением вида (4.9). Действительно, в силу (3.2)

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial y} + au = \left(\frac{\partial A_n}{\partial y} + aA_n\right)X^{(n)} + \left(\frac{\partial A_{n-1}}{\partial y} + aA_{n-1}\right)X^{(n-1)} + \ldots$$

Причем коэффициент при $X^{(n)}$ тождественно равен нулю. Следовательно, специальное решение u_1 уравнения имеет порядок не больший, чем $n-1$. По предположению индукции один из инвариантов $h_1, \ldots, h_n$ уравнения (E_1) (а значит, и (E_0)) равен нулю. Лемма доказана.

Теорема 4.2. *Пусть для уравнения (3.1)* $h_s = k_{-r} = 0$. *Тогда общее решение данного уравнения представимо в виде*

$$u = A_0X + A_1X' + \ldots + A_sX^{(s)} + B_0Y + B_1Y' + \ldots + B_rY^{(r)}. \quad (4.10)$$

Здесь $A_i(x,y)$, $B_i(x,y)$ *— некоторые конкретные функции, а* X *и* Y *— произвольные функции переменных* x *и* y *соответственно.*

В дальнейшем мы будем для краткости обозначать сумму (4.10) с наивысшей s-й производной X и наивысшей r-й производной Y через $V_{s,r}$. Также будем полагать, что в (4.10), возможно, $A_s = 0$ либо $B_r = 0$.

Доказательство. Поскольку $h_s = k_{-r} = 0$, согласно изложенному выше (см. (4.7))

$$u_s = e^{-\int a_s\,dy}\left(X(x) + \int Y(y)e^{\int(a_s dy - b dx)}dy\right), \qquad (4.11)$$

$$u_{-r} = e^{-\int b_{-r}\,dx}\left(Y_1(y) + \int X_1(x)e^{\int(b_{-r}dx - ady)}dx\right). \qquad (4.12)$$

Как было показано выше (см. (4.6)),

$$u = e^{-\int a\,dy}\frac{1}{h_{-1}}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{h_{-2}}\frac{\partial}{\partial y}\cdots\frac{1}{h_{-r}}\frac{\partial}{\partial y}\Big(u_{-r}e^{\int a\,dy}\Big). \qquad (4.13)$$

Из формулы (4.1) следует, что

$$u_s = \left(\frac{\partial}{\partial y} + a_{s-1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + a_{s-2}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right)u \qquad (4.14)$$

Подставляя (4.12) в (4.13), а затем (4.13) — в (4.14), приходим к еще одному выражению для u_s. Приравняем его к (4.11) и получим, что для любых $X_1(x)$, $Y_1(y)$ существуют $X(x)$, $Y(y)$, такие, что $e^{-\int a_s\,dy}\left(X(x) + \int Y(y)e^{\int(a_s dy - bdx)}dy\right) = \left(\frac{\partial}{\partial y} + a_{s-1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + a_{s-2}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right)e^{-\int a\,dy}\frac{1}{h_{-1}}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{h_{-2}}\frac{\partial}{\partial y}\cdots \frac{1}{h_{-r}}\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-\int b_{-r}\,dx}\left(Y_1(y) + \int X_1(x)e^{\int(b_{-r}dx - ady)}dx\right)\right)$. Положим в этой формуле $X_1 \equiv 0$, умножим обе ее части на $e^{\int a_s\,dy}$ и продифференцируем по y. Получим соотношение вида

$$e^{\int(a_s dy - bdx)}Y = \frac{\partial}{\partial y}\Big(B_0Y_1 + B_1Y_1' + \ldots + B_{s+r}Y_1^{(s+r)}\Big), \qquad (4.15)$$

где $B_{s+r} \neq 0$. В соответствии с формулой (4.5) общее решение уравнения (E_0) имеет вид $ue^{\int b\,dx} = \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x}\cdots\frac{1}{h_{s-1}}\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\int b\,dx - a_s\,dy}\left(X + \int Ye^{-\int(b\,dx - a_s\,dy)}dx\right)\right)$. Подставляя в эту формулу соотношение (4.15), приходим к $u = e^{-\int b\,dx}\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x}\cdots \frac{1}{h_{s-1}}\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\int b\,dx - a_s\,dy}\left(X + B_0Y_1 + \ldots + B_{s+r}Y_1^{(s+r)}\right)\right)$, что и доказывает теорему.

5. Формулы Дарбу

Указанный в теореме 4.2 явный вид общего решения уравнения Лапласа с конечной в обе стороны цепочкой преобразований Лапласа не позволяет найти выражение для коэффициентов A_i, B_i, а также вид коэффициентов $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ самого́ уравнения. Известный французский математик XIX–XX вв. Г. Дарбу [34] дал явные формулы для этих коэффициентов в терминах определителей специального вида (вронскианов).

Напомним предварительно необходимые сведения из курса обыкновенных дифференциальных уравнений.

Определение 1. *Вронскианом (определителем Вронского) набора функций $z_1(x)$, $z_2(x)$, …, $z_n(x)$ одного переменного x называется определитель*

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_1' & \cdots & z_1^{(n-1)} \\ z_2 & z_2' & \cdots & z_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_n & z_n' & \cdots & z_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \tag{5.1}$$

Теорема 5.1. *Для того, чтобы аналитические функции $z_1(x)$, …, $z_n(x)$ были линейно зависимыми на некотором числовом промежутке, необходимо и достаточно, чтобы в этом промежутке их вронскиан был тождественно равен нулю.*

Напомним теперь, как по заданной системе линейно независимых функций $z_1(x), \ldots, z_n(x)$ построить линейное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение, для которого z_i образовывали бы фундаментальную систему решений. Именно, добавим к заданным z_i еще одну функцию $z(x)$ и образуем их вронскиан:

$$L = \begin{vmatrix} z & z' & \cdots & z^{(n)} \\ z_1 & z_1' & \cdots & z_1^{(n)} \\ z_2 & z_2' & \cdots & z_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_n & z_n' & \cdots & z_n^{(n)} \end{vmatrix}. \tag{5.2}$$

Разложив его по первой строке, получим выражение $L = W_0 z^{(n)} + W_1 z^{(n-1)} + \ldots + W_{n-1} z' + W_n z$, где W_i — некоторые определители, составленные их z_i и их производных. Видим, что $W_0 \neq 0$, поскольку совпадает с вронскианом (5.1) линейно независимой системы. Тогда уравнение $L = W_0 z^{(n)} + W_1 z^{(n-1)} + \ldots + W_{n-1} z' + W_n z = 0$ на функцию $z(x)$ имеет заданные z_i в качестве фундаментальной системы решений. Действительно, если $z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_n z_n$, то определитель (5.2) равен нулю в силу теоремы 5.1. Обратно, если $L = 0$, то система $z(x)$, $z_1(x)$, $\ldots$, $z_n(x)$ линейно зависима; поскольку исходные z_i независимы, получаем, что $z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_n z_n$.

Кроме того, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 5.2. *Линейная комбинация* $V = \alpha_0(x,y)Y(y) + \alpha_1(x,y)Y'(y) + \ldots + \alpha_n(x,y)Y^{(n)}(y)$, *где* $\alpha_s(x,y)$ *— заданные функции, обращается тождественно в ноль для произвольной функции* $Y(y)$, *если и только если* $\alpha_s(x,y) \equiv 0$, $\forall s$.

Доказательство. Выберем n линейно независимых функций $Y_i(y)$. Подставляя их в выражение $V = 0$, получаем систему однородных уравнений на $\alpha_s(x,y)$:

$$\begin{pmatrix} Y_1 & Y_1' & \cdots & Y_1^{(n)} \\ Y_2 & Y_2' & \cdots & Y_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_n & Y_n' & \cdots & Y_n^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0.$$

Определитель данной системы есть вронскиан линейно независимой системы функций $\{Y_i\}_{i=1}^n$ и, следовательно, отличен от нуля. Поэтому $\alpha_s(x,y) \equiv 0$, $\forall s$, ч.т.д.

Лемма 5.3. *Если уравнение Лапласа* (E_0) *имеет общее решение вида* $V_{k,m}$ *(см. (4.10)), то* (E_1) *имеет общее решение вида* $V_{k-1,m+1}$*; соответственно* (E_{-1}) *имеет общее решение вида* $V_{k+1,m-1}$.

Доказательство. Непосредственной подстановкой $u = V_{k,m} = \sum_{i=0}^{k} A_i X^{(i)} + \sum_{j=0}^{m} B_j Y^{(j)}$ в уравнение Лапласа (E_0), как и при доказательстве леммы 4.1, получаем соотношение вида $0 = C_{k+1}X^{(k+1)} + C_kX^{(k)} + \ldots + D_{m+1}Y^{(m+1)}$, $C_{k+1} = (A_k)_y + aA_k$, $D_{m+1} = (B_m)_x + bB_m$. Поскольку X и Y — произвольные функции, применив лемму 5.2, получаем, что $(A_k)_y + aA_k = 0$, $(B_m)_x + bB_m = 0$. Тогда $u_1 = \frac{\partial u}{\partial y} + au = \big((A_k)_y + aA_k\big)X^{(k)} + \ldots + \big((A_{k-1})_y + aA_{k-1}\big)X^{(k-1)} + B_mY^{(m+1)} + \ldots$ очевидно, имеет вид $V_{k-1,m+1}$. Аналогичное рассуждение применимо к решению u_{-1} (E_{-1}).

Следовательно, применив X-преобразование Лапласа нужное число раз, придем к уравнению (E_k), которое имеет общее решение вида

$$u_k = \widetilde{A}X + \widetilde{B}_0Y + \widetilde{B}_1Y' + \ldots + \widetilde{B}_{m+k}Y^{(m+k)}. \tag{5.3}$$

Совершим мультипликативное преобразование неизвестной функции $u_k = \widetilde{A} \cdot v$. Это преобразование не изменяет цепочки инвариантов Лапласа. Имеем

$$v = X + B_0Y + B_1Y' + \ldots + B_{m+k}Y^{(m+k)}, \tag{5.4}$$

$B_i = \widetilde{B}_i/\widetilde{A}$. Уравнение Лапласа, которому удовлетворяет v, имеет вид $v_{xy} + bv_y = 0$ (т.е. $a = 0$, $c = 0$), поскольку, полагая $Y \equiv 0$ в (5.4), при подстановке в (2.16) получим $aX' + cX = 0$ для произвольной функции $X(x)$, что возможно лишь при $a = c = 0$. В дальнейшем мы будем работать с уравнением Лапласа для v, и его цепочкой преобразований Лапласа, обозначая их для простоты также (E_k).

Взяв $Y \equiv 0$, получим, что (E_k) имеет частное решение вида (4.9) с $n = 0$. Из леммы 4.1 получаем, что инвариант Лапласа $h_k = 0$, т.е. общее решение (E_k) есть

$$v = \alpha(x, y)\left(X(x) + \int Y(y)\beta(x, y)\,dy\right) \tag{5.5}$$

по формуле (4.8) с $\alpha = e^{-\int a\,dy} = 1$, $\beta = e^{-\int b\,dx}$. Приравнивая выражения (5.4) и (5.5), разделив на $\alpha(x, y)$ и продифференцировав по y, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_{i=0}^{m+k} B_i Y^{(i)}\right) = Y_1\beta. \qquad (5.6)$$

Отсюда выражаем Y_1 через Y и ее производные:

$$Y_1 = \tfrac{1}{\beta}\tfrac{\partial}{\partial y}\left(\textstyle\sum_{i=0}^{m+k} B_i Y^{(i)}\right) = \lambda_0 Y + \ldots + \lambda_{m+k+1} Y^{(m+k+1)}, \quad (5.7)$$

где

$$\begin{cases} \lambda_0 = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial y} B_0 \\ \lambda_1 = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial}{\partial y} B_1 + B_0\right) \\ \quad\vdots \\ \lambda_{m+k} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial}{\partial y} B_{m+k} + B_{m+k-1}\right) \\ \lambda_{m+k+1} = \frac{1}{\beta} B_{m+k} \end{cases} \qquad (5.8)$$

Покажем, что в (5.7) коэффициенты λ_i зависят только от y. Действительно, продифференцировав (5.7) по x, выводим $(\lambda_0)_x Y + (\lambda_1)_x Y' + \ldots + (\lambda_{m+k+1})_x Y^{(m+k+1)} = 0$. Применяя лемму 5.2, получаем, что $(\lambda_s)_x = 0$, $\forall s$.

Выразив из последнего уравнения (5.8) $B_{m+k} = \beta\lambda_{m+k+1}$, подставим его в предпоследнее уравнение (5.8), что позволит нам выразить B_{m+k-1}. Продолжая этот процесс, мы в конце концов выразим из второго уравнения (5.8) B_0. Подставив его в первое уравнение, получим

$$\beta\lambda_0 - \frac{\partial}{\partial y}(\beta\lambda_1) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\beta\lambda_2) - \ldots + (-1)^{m+k+1}\frac{\partial^{m+k+1}}{\partial y^{m+k+1}}(\beta\lambda_{m+k+1}) =$$
$$= \mu_{m+k+1}\beta_y^{(m+k+1)} + \ldots + \mu_0\beta = 0, \quad (5.9)$$

где коэффициенты μ_i выражаются через λ_i и их производные. Легко видеть, что можно и обратно рекуррентно выразить λ_i через μ_i и их производные, начав с $\lambda_{m+k+1} = (-1)^{m+k+1}\mu_{m+k+1}$. Заметим, что в (5.9) λ_i, μ_i зависят только от y, а $\beta = \beta(x, y)$. Тем самым (5.9) представляет собой обыкновенное линейное дифференциальное уравнение по y на функцию β. Как доказывается в курсе дифференциальных уравнений, общее решение (5.9) имеет вид

$$\beta = C_1(x)\beta_1(y) + \ldots + C_{m+k+1}(x)\beta_{m+k+1}(y), \qquad (5.10)$$

где β_i — фундаментальная система решений уравнения (5.9), а $C_i(x)$ — произвольные функции от x.

Формула (5.10) и будет служить основой для получения явного вида решений уравнения Лапласа с конечной цепочкой инвариантов. Именно, проведем все предыдущие рассуждения в обратном порядке. Будем считать, что мы задали произвольные наборы линейно независимых функций $\beta_i(y)$ и линейно независимых функций $C_i(x)$, $i = 1, \ldots, m + k + 1$. С помощью (5.2) найдем линейное обыкновенное дифференциальное уравнение (по переменной y) порядка $m + k + 1$, для которого $\beta_i(y)$ служат фундаментальной системой решений. Это даст нам коэффициенты μ_i в формуле (5.9), а, следовательно, и коэффициенты λ_i. Как объяснялось выше, из (5.8) находим B_i. Формула (5.10) дает выражение для $\beta = e^{-\int b_{m+k+1} dx}$ и, следовательно, для $b_{m+k+1} = -(\ln \beta)_x$ для ненулевого коэффициента (E_{m+k+1}), которое имеет общее решение (5.4). Совершив обратное мультипликативное преобразование $u = \widetilde{A}(x, y)v$ с произвольной функцией $\widetilde{A}(x, y)$ и проделав k раз Y-преобразование Лапласа, получаем искомый общий вид уравнения (E_0) с конечной в обе стороны цепочкой преобразований Лапласа и его общее решение в виде дифференциальных выражений от $2(m + k + 1)$ произвольных функций одного переменного $\beta_i(y)$, $C_i(x)$ и мультипликативного множителя $\widetilde{A}(x, y)$.

Дарбу удалось получить красивые явные формулы для этих дифференциальных выражений. Для этого, следуя Дарбу, будем непосредственно пытаться выписать выражения для коэффициентов λ_i в (5.7). Именно, возьмем $y_i(y)$, $i = 1, \ldots, m + k + 1$ — фундаментальную систему решений уравнения

$$\lambda_0 Y + \lambda_1 Y' + \ldots + \lambda_{m+k+1} Y^{(m+k+1)} = 0.$$

С помощью (5.2) найдем коэффициенты λ_i с точностью до мультипликативного множителя. Из равенства (5.6) получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_{i=0}^{m+k} B_i Y^{(i)}\right) = Y_1 \beta = \sum_{i=0}^{m+k+1} \lambda_i Y^{(i)} = 0$$

при подстановке $Y = y_p(y)$. Следовательно,

$$\sum_{i=0}^{m+k} B_i y_p^{(i)} = x_p(x), \quad p = 1, \ldots, m+k+1. \tag{5.11}$$

Будем теперь считать, что $y_p(y)$, $x_p(x)$ — заданные, линейно независимые наборы функций и выразим все интересующие нас величины в виде дифференциальных выражений от этих $2(m+k+1)$ функций одного переменного. Добавим к уравнениям (5.11) выражение $v = X(x) + \sum B_i Y^{(i)}$ и рассмотрим полученную совокупность как систему $m+k+2$ линейных уравнений на $m+k+2$ неизвестные величины B_i и v. Отсюда по формуле Крамера получаем

$$v = \frac{\Delta_1}{\Delta}\ ;\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} X & Y & Y' & \ldots & Y^{(M)} \\ x_1 & y_1 & y_1' & \ldots & y_1^{(M)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{M+1} & y_{M+1} & y_{M+1}' & \ldots & y_{M+1}^{(M)} \end{vmatrix}\ ,$$
$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \ldots & y_1^{(M)} \\ y_2 & y_2' & \ldots & y_2^{(M)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{M+1} & y_{M+1}' & \ldots & y_{M+1}^{(M)} \end{vmatrix} \tag{5.12}$$

$(M = m+k)$ и аналогичные формулы для B_i.

Найдем теперь выражения для полного решения u_0 исходного уравнения Лапласа (E_0) через введенные функциональные параметры $x_p(x)$, $y_p(y)$. Из (4.5) мы знаем, что $u_0 = D_0 v + D_1 \frac{\partial v}{\partial x} + \ldots + D_k \frac{\partial^k v}{\partial x^k}$, где $D_s(x,y)$ — некоторые фиксированные коэффициенты. Поскольку из (5.12) мы видим, что $v \equiv 0$ при подстановке $X = x_p$, $Y = y_p$, ясно, что также $u_0 \equiv 0$ при этой подстановке. С другой стороны, для u_0 мы имели выражение

$$u_0 = V_{k,m} = F_0 X + F_1 X' + \ldots + F_k X^{(k)} + \\ + G_0 Y + G_1 Y' + \ldots + G_m Y^{(m)}. \tag{5.13}$$

Подставляя в него $X = x_p$, $Y = y_p$, получим систему $m + k + 1$ однородных уравнений на $m + k + 2$ неизвестных коэффициента F_i, G_j. Один из них можно считать произвольным, что соответствует тому факту, что u_0 допускает мультипликативные замены $u_0 \longrightarrow \vartheta(x, y) u_0$. Присоединив к этим уравнениям уравнение (5.13) (как мы выше сделали для (5.11), (5.12)), находим выражения для F_i, G_j и

$$u_0 = \vartheta(x, y) \begin{vmatrix} X & X' & \dots & X^{(k)} & Y & Y' & \dots & Y^{(m)} \\ x_1 & x_1' & \dots & x_1^{(k)} & y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(m)} \\ x_2 & x_2' & \dots & x_2^{(k)} & y_2 & y_2' & \dots & y_2^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_M & x_M' & \dots & x_M^{(k)} & y_M & y_M' & \dots & y_M^{(m)} \end{vmatrix} \tag{5.14}$$

$(M = m + k + 1)$. Можно показать (оставляем это читателю в качестве упражнения), что определитель в (5.14) не равен тождественно нулю как функция от X, Y и их производных, если каждый из наборов функций $\{x_p\}$, $\{y_p\}$ линейно независим. Заметим, что, разлагая определитель (5.14) по верхней строке, мы получаем искомые выражения для F_i, G_j, как коэффициенты в этом разложении при X, X', $\dots$, Y, Y', $\dots$

Следуя Дарбу, покажем, как явно выписать коэффициенты уравнения (E_0), зная выражения (5.14) для его решения. Для простоты полагаем $\vartheta(x, y) \equiv 1$. Из (5.13)

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\partial F_0}{\partial x} X + \dots + F_k X^{(k+1)} + \frac{\partial G_0}{\partial x} Y + \dots + \frac{\partial G_m}{\partial x} Y^{(m)},$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{\partial F_0}{\partial y} X + \dots + \frac{\partial F_k}{\partial y} X^{(k)} + \frac{\partial G_0}{\partial y} Y + \dots + G_m Y^{(m+1)},$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F_0}{\partial x \partial y} X + \dots + \frac{\partial F_k}{\partial y} X^{(k+1)} + \frac{\partial^2 G_0}{\partial x \partial y} Y + \dots + \frac{\partial G_m}{\partial x} Y^{(m+1)},$$

Следовательно, комбинация

$$\mathcal{M} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - \frac{(F_k)_y}{F_k} \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{(G_m)_x}{G_m} \frac{\partial u_0}{\partial y} \tag{5.15}$$

не содержит $X^{(k+1)}$, $Y^{(m+1)}$. Кроме того, $\mathcal{M}$ зануляется, как и u_0, при подстановке $X = x_p$, $Y = y_p$, $\forall p$. Мы видели выше, что это свойство характеризует u_0 с точностью до мультипликативного множителя, т.е. $\mathcal{M} = c(x,y)u_0$, что дает нам уравнение Лапласа на u_0. Коэффициент $c(x,y)$ легче всего найти, подставив $X \equiv 1$, $Y \equiv 0$ в (5.13). Имеем тогда $u_0 = F_0$, т.е. из (5.15)

$$c(x,y) = \frac{1}{F_0}\left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial x \partial y} - \frac{(F_k)_y}{F_k}\frac{\partial F_0}{\partial x} - \frac{(G_m)_x}{G_m}\frac{\partial F_0}{\partial y}\right).$$

6. Задачи ([11])

1. Найдите инварианты уравнения (E_n), если исходное уравнение имеет вид

$$u_{xy} + \frac{\alpha}{x+y}\,u_x + \frac{\beta}{x+y}\,u_y + \frac{\gamma}{(x+y)^2}\,u = 0,$$

где α, β, γ — постоянные.

2. Покажите, что если уравнения (E_0) и (E_1) имеют одни и те же инварианты, то каждое из них заменой переменных приводится к виду $u_{xy} = u$.

3. Покажите, что если инварианты уравнения (E_2) совпадают с инвариантами исходного уравнения (E_0), то $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\ln hk = 0$, и после соответствующей замены независимых переменных вида $x \longleftrightarrow f(x)$, $y \longleftrightarrow \varphi(y)$ величины $\ln h$ и $\ln k$ являются решениями уравнения

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = \operatorname{sh}\omega; \qquad \operatorname{sh}\omega \overset{def}{=} \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2}.$$

4. Покажите, что при замене $u = \lambda(x,y)v$ в уравнении

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2l(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + 2m(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + n(x,y)u = 0$$

величины $J = \frac{\partial l}{\partial y} - \frac{\partial m}{\partial x}$, $K = \frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + l^2 + m^2 - n$ являются инвариантами этого преобразования.

5. Покажите, что если инварианты J и K из предыдущего упражнения равны нулю, то уравнение сводится заменой $u = \lambda(x, y)v$ к

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0;$$

если $J = 0$, $K \neq 0$, то уравнение сводится к

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + cv = 0;$$

и если $J \neq 0$, $K = 0$, то к

$$\beta \frac{\partial^2 (\alpha v)}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 (\beta v)}{\partial y^2} = 0,$$

где $\alpha = e^{\int l\, dx}$, $\beta = e^{\int m\, dy}$.

6. Примените результаты задач 4, 5 к уравнению

$$z_{xy} + az_x + bz_y + cz = 0.$$

7. Докажите, что уравнение

$$z_{xy} + \frac{\alpha}{x+y}\, z_x + \frac{\beta}{x+y}\, z_y + \frac{\gamma}{(x+y)^2}\, z = 0$$

имеет решение вида

$$z = A_0 X + A_1 X' + \ldots + A_n X^{(n)},$$

где $X(x)$ — произвольная функция, если $\gamma = (\alpha + n)(\beta - n - 1)$, n — произвольное натуральное число. Найдите его общее решение для $n = 1$.

8. Покажите, что уравнение

$$z_{xy} + xyz_x + nxz = 0, \qquad n \text{ — целое},$$

имеет решения вида $z = A_0 X(x) + A_1 X'(x) + \ldots + A_n X^{(n)}(x)$, где $X(x)$ — произвольная функция. Постройте эти решения при $n = 2$ и $n = -1$.

9. Проинтегрируйте уравнения

$$(i) \qquad z_{xy} + xz_x + yz_y + (1+xy)z = 0;$$

$$(ii) \qquad z_{xy} + mxz_x + nyz_y + (2m - n + mnxy)z = 0;$$

$$(iii) \qquad z_{xy} + myz_x + e^{cy}z_y + (2c + my)e^{cy}z = 0,$$

где m, n, c — некоторые постоянные.

10. Проинтегрируйте уравнения

$$(i) \qquad z_{xy} - \frac{1}{y}\,z_x + \frac{k}{x}\,z_y - \frac{k}{xy}\,z = 0, \qquad k = const;$$

$$(ii) \qquad z_{xy} + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x-y}\right) z_x - \frac{2}{x}\,z_y - \frac{2}{x}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x-y}\right) z = 0;$$

$$(iii) \qquad z_{xy} + \frac{2}{x-y}\,z_x - \frac{2}{x-y}\,z_y - \frac{4}{(x-y)^2}\,z = 0.$$

11. Выпрямив характеристики, преобразуйте уравнение

$$z_{xx} + 2\lambda z_{xy} + (\lambda^2 - \mu^2)z_{yy} + \alpha z_x + \beta z_y = 0,$$

где α, β, λ, μ — функции независимых переменных, в уравнение вида

$$z_{xy} + az_x + bz_y = 0;$$

найдите инварианты последнего в терминах α, β, λ, μ. Примените полученный результат к уравнению

$$z_{xx} + \frac{3}{2}z_{xy} + \frac{1}{2}z_{yy} - \frac{2}{x}(z_x + z_y) = 0$$

и покажите, что для преобразованного уравнения ряд преобразований Лапласа обрывается с двух сторон.

12. Решите уравнение

$$z_{xx} - z_{yy} = \frac{1}{x}\,(z_x - z_y),$$

используя преобразование из предыдущего упражнения.

13. Проинтегрируйте уравнения

$$(i) \qquad z_{xy} - xz_x - yz_y - (1 - xy)z = 0;$$

$$(ii) \qquad z_{xy} - mxz_x - nyz_y + (m - 2n + mnxy)z = 0,$$

m, n — постоянные;

$$(iii) \qquad z_{xy} - myz_x - e^{cy}z_y + (c - my)e^{cy}z = 0,$$

m, c — постоянные;

$$(iv) \qquad z_{xy} - xyz_x + mxz = 0, \quad m \text{ — целое;}$$

$$(v) \qquad z_{xy} + \frac{1}{y}\, z_x - \frac{c}{x}\, z_y - \frac{c}{xy}\, z = 0, \qquad c \text{ — постоянная;}$$

$$(vi) \qquad z_{xy} - \frac{2}{x - y}\, z_x + \frac{2}{x - y}\, z_y = 0;$$

$$(vii) \quad z_{xy} + \left(\frac{1}{x - y} - \frac{1}{y}\right) z_x + \frac{2}{x}\, z_y -$$

$$- \left(\frac{2}{xy} - \frac{2}{x(x - y)} - \frac{1}{(x - y)^2}\right) z = 0.$$

7. Уравнения математической физики. Классические методы интегрирования и современные результаты

Изложенный выше каскадный метод Лапласа фактически был известен для некоторых частных случаев еще Эйлеру [24]. Лаплас [52] и позднее Дарбу [34] существенно развили этот метод. В математике того периода их результаты широко использовались в дифференциальной геометрии; фактически целый том [34] известного 4-томного трактата Дарбу по теории поверхностей целиком посвящен подробному изучению преобразований Лапласа и их приложениям к решению различных задач дифференциальной геометрии. Особенно важным для этих приложений (см. [30, 34]) было уравнение Мута́ра

$$u_{xy} = \lambda(x, y)u, \qquad u = u(x, y), \tag{$\mathcal{M}$}$$

— частный случай уравнения Лапласа (3.1). В математике и особенно в квантовой физике XX в. огромную роль сыграло уравнение Шредингера, которое в стационарном двумерном случае имеет вид

$$u_{xx} + u_{yy} = V(x, y)u, \quad u = u(x, y), \tag{7.1}$$

отличающийся лишь знаком от уравнения $u_{xx} - u_{yy} = V(x, y)u$, эквивалентного $(\mathcal{M})$ (см. § 1).

Большой интерес представляет получение в явном виде их точных решений для различных «потенциалов» $\lambda(x, y)$ и $V(x, y)$. Один из наиболее мощных методов получения решений таких уравнений — теория преобразований Мутара [59], [34], как частный случай более общей теории преобразований Бэклунда [29] — был развит в конце XIX – начале XX вв. для нужд дифференциальной геометрии.

Уравнение Мутара $(\mathcal{M})$ имеет в настоящее время многочисленные приложения в теории интегрируемых (2+1)-мерных нелинейных систем уравнений в частных производных математической физики. В рамках классической дифференциальной геометрии ($\mathcal{M}$) играет ключевую роль в изучении центральных задач дифференциальной геометрии того времени — теории изгибания поверхностей, теории конгруенций, теории сопряженных сетей. В последние десятилетия ($\mathcal{M}$) применяется для нахождения решений уравнений типа Кадомцева-Петвиашвили (описывающего волновые процессы в плазме) и др. [26, 56].

Заметный вклад в развитие методов интегрирования нелинейных уравнений второго порядка был внесен, в частности, известным российским математиком, основателем Московской математической школы Д.Ф. Егоровым [10]. К сожалению, развитые Дарбу, Гурса, Егоровым и другими выдающимися математиками XIX и начала XX вв. методы интегрирования уравнений Лапласа и Мутара, применимые также к уравнениям Шредингера (7.1), были вскоре забыты. Лишь в последнюю четверть XX в. эти результаты вновь были востребованы в математической физике. Как оказалось, классические методы могут быть обобщены на случай линейных уравнений более высокого порядка [68] и нелинейные уравнения с частными производными (см., например, [13]). Были вскрыты многочисленные связи результатов Дарбу, Гурса и др. с современными методами, развивавшимися в 70–80 гг. XX в. (см., например, [15, 23, 29, 56, 61]). Эллиптический вариант преобразования Мутара (см. ниже § 8) для уравнения Шредингера (7.1) привел к решению одного из вопросов спектральной теории двумерных операторов [20]. Начавшаяся работа по актуализации старых методов и их применению к решению задач современной математики и физики еще далека от завершения.

Ниже мы излагаем основы этой классической теории и некоторые из ее современных приложений к решению задач интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными. Также изложены новые результаты по теории интегрирования уравнения Гурса, принадлежащие авторам. Дается пример решения одной из стандартных систем, описывающих динамику стохастических систем (модели Ферхюльста) методом Лапласа, полученного в [41].

8. Уравнение Мутара

Французским математиком Т. Мутаром [59] в конце XIX в. было найдено замечательное преобразование уравнения вида $(\mathcal{M})$ в новое уравнение того же вида с другим коэффициентом $\lambda = \lambda_1(x, y)$. Преобразование Мутара позволяет по двум решениям $u = \omega(x, y)$ и $u = \varphi(x, y)$ уравнения $(\mathcal{M})$ с данным «потенциалом» $\lambda = \lambda_0(x, y)$ находить (квадратурой) решение ϑ того же уравнения с измененным потенциалом $\lambda_1(x, y) = \lambda_0 - 2(\ln\omega)_{xy}$. Соответствующие формулы перехода

$$\lambda_1 = \lambda_0 - 2(\ln\omega)_{xy} = -\lambda_0 + \frac{2\omega_x\omega_y}{\omega^2} = \omega\left(\frac{1}{\omega}\right)_{xy}, \tag{8.1}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} (\omega\vartheta)_x & = & -\omega^2\left(\frac{\varphi}{\omega}\right)_x, \\ (\omega\vartheta)_y & = & \omega^2\left(\frac{\varphi}{\omega}\right)_y, \end{array}\right. \tag{8.2}$$

т.е. $\vartheta = \frac{1}{\omega}\int\left(-\omega^2\left(\frac{\varphi}{\omega}\right)_x dx + \omega^2\left(\frac{\varphi}{\omega}\right)_y dy\right)$, устанавливают (многозначное) соответствие между решениями уравнения Мутара $(\mathcal{M}_0)$ (т.е. $(\mathcal{M})$ с потенциалом $\lambda_0(x, y)$) и $(\mathcal{M}_1)$ (т.е. $(\mathcal{M})$ с потенциалом $\lambda_1(x, y)$).

Задача 1. Используя уравнения на ω, φ: $\omega_{xy} = \lambda\omega$, $\varphi_{xy} = \lambda\varphi$, проверить совместность системы (8.2) и равенство $\vartheta_{xy} = \lambda_1\vartheta$.

Задача 2. Проверьте, что $u = 1/\omega$ — решение $u_{xy} = \lambda_1 u$, задающее обратное преобразование $\lambda_1 \to \lambda_0$ в соответствии с формулой (8.1).

Задача 3. Проверить, что

$$\psi = -\omega\vartheta/\varphi \tag{8.3}$$

есть решение уравнения $(\mathcal{M})$ с $\lambda = \lambda_2 = \lambda_0 - 2(\ln\varphi)_{xy}$ (см. рис. 1, стр. 38).

Предположим, что мы можем найти полное решение $(\mathcal{M})$ для случая некоторого заданного потенциала λ_0 с произволом в 2 функции одного переменного; из формул (8.2) мы можем, меняя φ, получить квадратурой общее решение $(\mathcal{M})$ с потенциалом λ_1 также с произволом в 2 функции одного переменного.

Так, при $\lambda_0 = 0$ общее решение $(\mathcal{M})$ $\varphi = \gamma(x) + \mu(y)$ дает общее решение

$$\vartheta = \left(2\alpha(x)\mu(y) - 2\beta(y)\gamma(x) + \int (\mu_y\beta - \beta_y\mu)\, dy + \right.$$

$$\left. + \int (\gamma\alpha_x - \alpha\gamma_x)\, dx \right) \frac{1}{\alpha(x) + \beta(y)}$$

для потенциала $\lambda_1 = -2\left[\ln\left(\alpha(x) + \beta(y)\right)\right]_{xy} = \frac{2\alpha_x\beta_y}{(\alpha+\beta)^2}$ (т.е. $\omega = \alpha(x) + \beta(y)$). Ниже (см. стр. 58) мы приведем другую формулу (12.2) для этого решения, не включающую квадратур.

Продолжая далее цепочку преобразований Мутара $(\mathcal{M}_0) \to (\mathcal{M}_1) \to (\mathcal{M}_2) \to \ldots\ (\mathcal{M}_k) \to \ldots$, мы получаем, что (априори) k-й потенциал λ_k зависит от выбора $2k$ функций одного переменного — начальных данных решений $\omega_s(x, y)$ уравнений $(\mathcal{M}_s)$, $s = 0, 1, \ldots, k-1$.

В [26, 56] указан способ выразить потенциал λ_k и решения уравнения Мутара $(\mathcal{M}_k)$ с этим потенциалом через $2k$ решений исходного уравнения $(\mathcal{M}_0)$ («формулы пфаффианов», аналогичные «формулам вронскианов» для случая преобразований Дарбу $(1 + 1)$-мерных интегрируемых уравнений [56]).

Интересно ответить на вопрос: насколько широк получившийся набор потенциалов $\lambda_k(x, y)$ по сравнению с множеством всех гладких функций 2-х переменных? В работе [7] было показано, что набор потенциалов $\lambda_k(x, y)$, получающихся из произвольного начального $\lambda_0(x, y)$, будет (локально) плотным в пространстве гладких функций двух переменных. Именно, верен следующий результат.

Теорема 8.1. *Пусть задан произвольный начальный потенциал $\lambda_0(x, y)$, принадлежащий классу C^∞ в окрестности точки $(0, 0)$. Тогда для любого $N = 0, 1, 2, \ldots$ найдется такое K, что для любого набора чисел $P_{x_1 \ldots x_k}$, $0 \le k \le N$, $x_s \in \{x, y\}$ производные потенциала λ_K (из последовательности преобразований Мутара $(\mathcal{M}_0) \to (\mathcal{M}_1) \to (\mathcal{M}_2) \to \ldots (\mathcal{M}_n) \to \ldots$) в* *точке* $(0,0)$ *совпадают с* $P_{x_1\ldots\, x_k}$*:*

$$\partial_{x_1}\partial_{x_2}\ldots\ \partial_{x_k}\lambda_K(0,0)=P_{x_1\ldots\, x_k}, \qquad \partial_z=\frac{\partial}{\partial z}, \quad k\le N. \quad (8.4)$$

С другой стороны, в работе [4] было показано, что можно избежать квадратур в цепочке преобразований Мутара $(\mathcal{M}_0)\to(\mathcal{M}_1)\to(\mathcal{M}_2)\to\ldots(\mathcal{M}_k)\to\ldots$, начиная с $\mathcal{M}_2$. Именно, *если* ω_1, ω_2, φ *— три решения* $(\mathcal{M})$ *с заданным* $\lambda=\lambda_0$, *и* ϑ_1, ϑ_2 *— решения преобразованных уравнений с потенциалами* $\lambda_1=\lambda_0-2(\ln\omega_1)_{xy}$, $\lambda_2=\lambda_0-2(\ln\omega_2)_{xy}$, *получаются из* φ *с помощью (8.2),* $\vartheta_i=\dfrac{1}{\omega_i}\displaystyle\int\left(-\omega_i^2\left(\frac{\varphi}{\omega_i}\right)_x dx+\omega_i^2\left(\frac{\varphi}{\omega_i}\right)_y dy\right)$, *то существует единственное решение* ϑ' *четвертого уравнения Мутара* $u_{xy}=\lambda_{12}u$, $\lambda_{12}=\lambda_1-2(\ln\omega_1')_{xy}=\lambda_2-2(\ln\omega_2')_{xy}$, *связанное с* ϑ_1, ϑ_2 *преобразованиями Мутара (8.2). Это* ϑ' *выражается в конечном виде алгебраической формулой*

$$\vartheta'-\varphi=\frac{\omega_1\omega_2}{\lambda}(\vartheta_2-\vartheta_1), \qquad \lambda=\omega_1\omega_1'=-\omega_2\omega_2', \qquad (8.5)$$

где ω_1', ω_2' *— получены из* ω_2, ω_1 *соответственно (8.2), (8.3), т.е.* $\omega_1'=\dfrac{1}{\omega_1}\displaystyle\int\left(-\omega_1^2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)_x dx+\omega_1^2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)_y dy\right)$ (ср. [30, v. II, p. II, § 297]).

Наглядно это утверждение можно проиллюстрировать диаграммой рис. 11. Каждая грань этого куба соответствует преобразованию Мутара; ребро соответствует переходу от вершины, изображающей уравнение Мутара с обозначенным в вершине потенциалом λ_i, к соседней вершине с преобразованным потенциалом $\lambda_j=\lambda_i-2(\ln\rho)_{xy}$, где ρ (одно из ω_s, ϑ_s, которым помечено ребро) — решение соответствующего уравнения $\rho_{xy}=\lambda_i\rho$. По двум ребрам, выходящим из одной вершины, достраиваем два других ребра и четвертую вершину по формулам (8.2) и (8.3): на рис. 10 по λ_0, φ и ω находим $\vartheta=\frac{1}{\omega}\int\left(-\omega^2\left(\frac{\varphi}{\omega}\right)_x dx+\omega^2\left(\frac{\varphi}{\omega}\right)_y dy\right)$ и $\psi=-\omega\vartheta/\varphi$, $\lambda_{12}=\lambda_1-2(\ln\vartheta)_{xy}=\lambda_2-2(\ln\psi)_{xy}$.

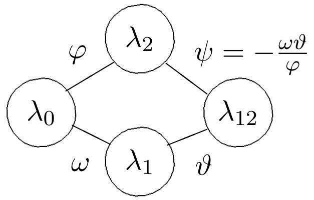

Рис. 10

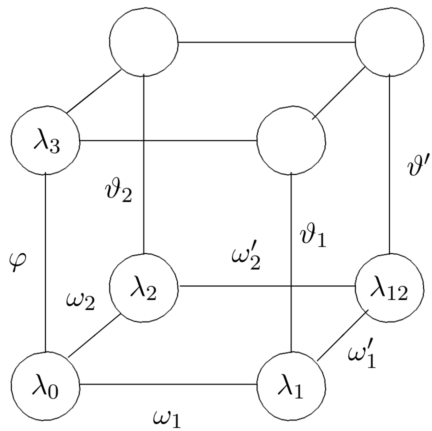

Рис. 11

Подобная техника генерации новых решений из известных характерна для преобразований Бэклунда — одного из мощных инструментов интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными (см., например, [29], [30]).

Рассмотрим теперь аналог преобразований Мутара для двумерного стационарного уравнения Шредингера

$$u_{\overline{x}\overline{x}} + u_{\overline{y}\overline{y}} = V(\overline{x}, \overline{y})u, \qquad u = u(\overline{x}, \overline{y}). \tag{8.6}$$

С формальной точки зрения (предполагая все встречающиеся функции голоморфными функциями своих двух аргументов) мы можем свести (8.6) к уравнению Мутара $u_{xy} = V(x, y)u$ простейшим преобразованием

$$\begin{cases} \overline{x} = x + y, \\ \overline{y} = ix - iy. \end{cases} \tag{8.7}$$

Задача 4. Проверьте, что после указанной замены формулы (8.1), (8.2) перейдут в

$$V_1 = V_0 - 2\Big(\partial^2_{xx} + \partial^2_{yy}\Big) \ln\omega = -V_0 + \frac{2(\omega^2_{\overline{x}} + \omega^2_{\overline{y}})}{\omega^2}, \tag{8.8}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} (\omega\vartheta)_{\overline{x}} = -i\omega^2 \left(\frac{\varphi}{\omega}\right)_{\overline{y}}, \\ (\omega\vartheta)_{\overline{y}} = i\omega^2 \left(\frac{\varphi}{\omega}\right)_{\overline{x}}, \end{array} \right. \tag{8.9}$$

а соотношения (8.3), (8.5) сохраняют свой вид.

Задача 5. Не предполагая аналитичности, непосредственно проверьте, что ϑ, полученная как решение (8.9), удовлетворяет (8.6) с потенциалом V_1. Проверьте совместность (8.9) и справедливость формул (8.3) и (8.5).

Как видно из (8.8), (8.9), если исходный потенциал V_0 и решения ω, φ уравнения (8.6) были вещественные, новое решение ϑ будет чисто мнимым, а новый потенциал V_1 будет попрежнему вещественным. Если мы хотим избежать появления мнимых величин, мы можем применить (8.8), (8.9) еще раз, получив вещественный потенциал $V_{12} = -V_1 + \frac{2(\vartheta^2_{\overline{x}} + \vartheta^2_{\overline{y}})}{\vartheta^2}$ и новое вещественное решение соответствующего уравнения Шредингера по формуле (8.5). Впрочем, можно поступить проще: поскольку ϑ, получаемое из (8.9) — решение линейного уравнения (8.6), мы можем избавиться от мнимых величин уже в первом преобразовании, убрав множитель i в формулах (8.9).

Задача 6. Проверьте, что формулы (8.3), (8.5) останутся при этом по-прежнему верными.

Отметим важный факт: в силу обратимости преобразований Мутара (задача 2) с помощью формул (8.1), (8.2), (8.5) мы можем получать *все* возможные композиции двух (соответственно трех) последовательных преобразований Мутара. Действительно, обратимость преобразования позволяет рассматривать рис. 10 как полностью симметричный относительно любой своей вершины; начиная от λ_1, мы можем взять любые два преобразования, приводящие к λ_0, λ_{12}; случай куба (рис. 11) полностью аналогичен.

9. Уравнение Гурса

В данном параграфе мы получим преобразование, аналогичное преобразованию Мутара, для другого важного нелинейного уравнения второго порядка

$$\vartheta_{xy} = 2\sqrt{\lambda(x,y)\vartheta_x\vartheta_y}. \tag{$\mathcal{GN}$}$$

Это уравнение впервые было изучено Э. Гурсá [44, 45].

Задача 7. Покажите, что подстановкой $z = \sqrt{\vartheta_x}$, $w = \sqrt{\vartheta_y}$ уравнение ($\mathcal{GN}$) приводится к линейной системе

$$\begin{cases} z_y = \sqrt{\lambda}\, w, \\ w_x = \sqrt{\lambda}\, z, \end{cases} \tag{9.1}$$

или, после исключения w,

$$z_{xy} = \frac{1}{2}(\log\lambda)_x z_y + \lambda\, z. \tag{$\mathcal{GL}$}$$

Легко найти инварианты Лапласа ($\mathcal{GL}$): $h = \lambda$, $k = -\frac{1}{2}(\ln\lambda)_{xy} + \lambda$. Пусть нам теперь заданы два решения $\vartheta_1(x,y)$, $\vartheta_2(x,y)$ уравнения (9.1). Квадратурой найдем функцию $\widehat{z}(x,y)$ из системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\vartheta_1\widehat{z}}{\sqrt{(\vartheta_1)_x}}\right) &= \vartheta_1\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\sqrt{(\vartheta_2)_x}}{\sqrt{(\vartheta_1)_x}}\right), \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\vartheta_1\widehat{z}}{\sqrt{(\vartheta_1)_x}}\right) &= \dfrac{-\vartheta_1^3\left(\frac{1}{\vartheta_1}\right)_{xy}}{(\vartheta_1)_{xy}}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\sqrt{(\vartheta_2)_x}}{\sqrt{(\vartheta_1)_x}}\right); \end{cases} \tag{9.2}$$

это $\widehat{z}$ является решением ($\mathcal{GL}$) с $\lambda \equiv \lambda_1 = \lambda - (\ln\vartheta_1)_{xy}$ и новое $\widehat{\vartheta}$ — решение (9.1) с преобразованным потенциалом λ_1 — находится посредством другой квадратуры из

$$\begin{cases} \widehat{\vartheta}_x &= (\widehat{z})^2, \\ \widehat{\vartheta}_y &= (\widehat{w})^2 = (\widehat{z}_y)^2/\lambda_1. \end{cases} \tag{9.3}$$

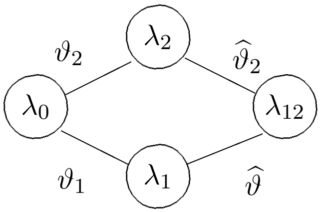

Рис. 12

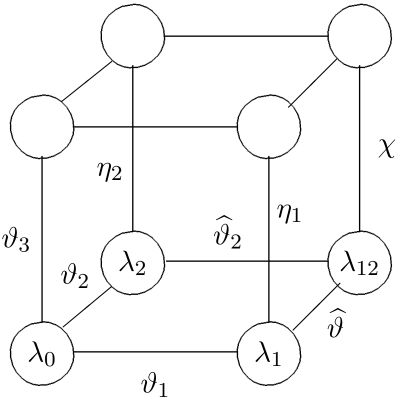

Рис. 13

Замечание. $\sqrt{\lambda_1} = \pm\left(\sqrt{\lambda} - \sqrt{(\vartheta_1)_x}\sqrt{(\vartheta_1)_y}/\vartheta_1\right)$. Отметим, что можно записать правую часть второго уравнения системы (9.2) в другой форме: $\dfrac{-\vartheta_1^3\left(\frac{1}{\vartheta_1}\right)_{xy}}{(\vartheta_1)_{xy}} = \vartheta_1\dfrac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda}} = \vartheta_1 - \dfrac{\sqrt{(\vartheta_1)_x}\sqrt{(\vartheta_1)_y}}{\sqrt{\lambda}}$; $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\sqrt{(\vartheta_2)_x}}{\sqrt{(\vartheta_1)_x}}\right) = \sqrt{\lambda}\left(\dfrac{\sqrt{(\vartheta_2)_y}}{\sqrt{(\vartheta_1)_x}} - \dfrac{\sqrt{(\vartheta_1)_y}\sqrt{(\vartheta_2)_x}}{\sqrt{(\vartheta_1)_x}}\right)$.

Задача 8. Проверьте, что системы (9.2), (9.3) совместны в силу исходного уравнения (9.1) на $\vartheta_1(x,y)$, $\vartheta_2(x,y)$, а $-1/\vartheta_1$ — решение преобразованного уравнения $(\mathcal{GN})$, переводящее его обратно в исходное.

Все эти формулы были получены Гурса. Покажем (следуя [4]), как, используя коммутативные диаграммы «ромба» и «куба», избавиться от второй квадратуры (9.3) и получить алгебраическую формулу для суперпозиции решений, аналогичную (8.5).

Прежде всего рассмотрим ромбическую диаграмму (рис. 12). Мы считаем, что в ней задан начальный потенциал

$\lambda = \lambda_0(x,y)$ и два решения $\vartheta_1(x,y)$, $\vartheta_2(x,y)$ уравнения (9.1). Тогда мы получаем $\lambda_1 = \lambda - (\ln\vartheta_1)_{xy}$ и $\lambda_2 = \lambda - (\ln\vartheta_2)_{xy}$. Для четвертого потенциала λ_{12} тем самым должно (в силу коммутативности диаграммы) выполняться равенство $\lambda_{12} = \lambda_1 - (\log\widehat{\vartheta})_{xy} = \lambda - (\log\widehat{\vartheta}\vartheta_1)_{xy} = \lambda_2 - (\log\widehat{\vartheta}_2)_{xy} = \lambda - (\log\widehat{\vartheta}_2\vartheta_2)_{xy}$, т.е. $(\log\widehat{\vartheta}\vartheta_1)_{xy} = (\log\widehat{\vartheta}_2\vartheta_2)_{xy}$. Предполагаем для простоты $\widehat{\vartheta}\vartheta_1 = \widehat{\vartheta}_2\vartheta_2$, или $\widehat{\vartheta}_2 = \widehat{\vartheta}\vartheta_1/\vartheta_2$.

Подставляя это выражение для $\widehat{\vartheta}_2$ в уравнение Гурса (λ_2) (так мы для простоты обозначим (9.1) с потенциалом $\lambda = \lambda_2$) и используя (λ_1) для $\widehat{\vartheta}$, легко доказать следующую теорему.

Теорема 9.1. *Функции* $\widehat{\vartheta}_2 = \vartheta_1\widehat{\vartheta}/\vartheta_2$ *и*

$$\widehat{\vartheta} = \frac{A\widehat{z}^2 + 2B\widehat{z}\widehat{w} + C\widehat{w}^2}{D}, \tag{9.4}$$

с $A = -\vartheta_1(\vartheta_2)_y + \vartheta_2(\vartheta_1)_y$, $B = \vartheta_1\sqrt{(\vartheta_2)_x(\vartheta_2)_y} - \vartheta_2\sqrt{(\vartheta_1)_x(\vartheta_1)_y}$, $C = -\vartheta_1(\vartheta_2)_x + \vartheta_2(\vartheta_1)_x$, $D = \left(\sqrt{(\vartheta_2)_x(\vartheta_1)_y} - \sqrt{(\vartheta_1)_x(\vartheta_2)_y}\right)^2$, *удовлетворяют* (λ_2) *и* (λ_1) *соответственно, если и только если* $\widehat{z} = \sqrt{\widehat{\vartheta}_x}$ *и* $\widehat{w} = \sqrt{\widehat{\vartheta}_y}$ *удовлетворяют совместной системе*

$$\begin{cases} \widehat{z}_x = \dfrac{\widehat{z}\Big((z_2)_x\vartheta_1 w_1 - (z_1)_x\vartheta_1 w_2 - z_2 z_1^2 w_1 + z_1^3 w_2\Big) + \widehat{w}\vartheta_1\Big((z_1)_x z_2 - (z_2)_x z_1\Big)}{\vartheta_1\Big(z_2 w_1 - z_1 w_2\Big)}, \\ \widehat{z}_y = \sqrt{\lambda_1}\,\widehat{w}, \\ \widehat{w}_y = \dfrac{\widehat{z}\vartheta_1\Big((w_2)_y w_1 - (w_1)_y w_2\Big) + \widehat{w}\Big((w_1)_y\vartheta_1 z_2 - (w_2)_y\vartheta_1 z_1 - z_2 w_1^3 + z_1 w_2 w_1^2\Big)}{\vartheta_1\Big(z_2 w_1 - z_1 w_2\Big)}, \\ \widehat{w}_x = \sqrt{\lambda_1}\,\widehat{z}; \end{cases} \tag{9.5}$$

здесь $z_k = \sqrt{(\vartheta_k)_x}$, $w_k = \sqrt{(\vartheta_k)_y}$.

Задача 9. Проверить утверждение теоремы прямым вычислением.

Как можно проверить, исключение $\widehat{w}$ из (9.5) дает линейное уравнение второго порядка на $\widehat{z}$, которое можно факторизовать:

$$\vartheta_1^2\big((z_2)_x z_1 - (z_1)_x z_2\big)\frac{d^2\widehat{z}}{dx^2} +$$

$$+\vartheta_1\big(-(z_2)_{xx}\vartheta_1 z_1 + (z_2)_x z_1^3 + (z_1)_{xx}\vartheta_1 z_2 - (z_1)_x z_2 z_1^2\big)\frac{d\widehat{z}}{dx} +$$

$$\Big((z_2)_{xx}(z_1)_x\vartheta_1^2 - (z_2)_{xx}\vartheta_1 z_1^3 - (z_2)_x(z_1)_{xx}\vartheta_1^2 + 3(z_2)_x(z_1)_x\vartheta_1 z_1^2 -$$
$$(z_2)_x z_1^5 + (z_1)_{xx}\vartheta_1 z_2 z_1^2 - 3(z_1)_x^2\vartheta_1 z_2 z_1 + (z_1)_x z_2 z_1^4\Big)\widehat{z} =$$

$$\big(\vartheta_1 z_1^3\big(z_2/z_1\big)_x\big)\cdot\left(\frac{d}{dx} - \big(\log\big[\vartheta_1\big(z_2/z_1\big)_x\big]\big)_x\right)\circ\frac{d}{dx}\left(\frac{\vartheta_1\widehat{z}}{z_1}\right).$$

Как очевидно, функция $f = \vartheta_1\big(z_2/z_1\big)_x$ является решением $\left(\frac{d}{dx} - \big(\log\big[\vartheta_1\big(z_2/z_1\big)_x\big]\big)_x\right) f = 0$, что дает нам первую из формул Гурса (9.2). Вторая из них эквивалентна следующему соотношению между $\widehat{w}$ и $\widehat{z}$:

$$\widehat{z}w_1 - \widehat{w}z_1 = w_1 z_2 - z_1 w_2, \tag{9.6}$$

которое получается после исключения $\widehat{z}_x$ из первых уравнений (9.2) и (9.5). Используя это соотношение, мы можем упростить (9.4):

$$\widehat{\vartheta} = \frac{-\widehat{z}^2\vartheta_1 + 2\widehat{z}\vartheta_1\sqrt{(\vartheta_2)_x} + \vartheta_2(\vartheta_1)_x - \vartheta_1(\vartheta_2)_x}{(\vartheta_1)_x}. \tag{9.7}$$

Следствие 9.2. *Решение $\widehat{\vartheta}$ уравнения (λ_1), задаваемое формулой (9.7) с $\widehat{z}$, удовлетворяющим (9.2) и $\widehat{\vartheta}_2 = \vartheta_1\widehat{\vartheta}/\vartheta_2$ (это — решение (λ_2)) обеспечивают коммутативность диаграммы рис. 12.*

Замечание. Найденное $\widehat{\vartheta}_2 = \vartheta_1\widehat{\vartheta}/\vartheta_2$ с $\widehat{z}_2 = \sqrt{(\widehat{\vartheta}_2)_x}$ *не* удовлетворяет (9.2); для этого необходимо выбрать $\widehat{z}_2 = -\sqrt{(\widehat{\vartheta}_2)_x}$.

Алгоритмическая формула суперпозиции для трех решений, соответствующая кубической диаграмме (рис. 13), содержится в следующей теореме.

Теорема 9.3. *Если заданы три решения ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 начального уравнения* (λ_0) *и найдены решения $\widehat{\vartheta}$, η_1 уравнения* (λ_1) *и $\widehat{\vartheta}_2$, η_2 уравнения* (λ_2) *(используя (9.7), (9.2)), то существует единственное решение χ четвертого уравнения Гурса* (λ_{12}), *связанное с обеими $\widehat{\vartheta}$, $\widehat{\vartheta}_2$ преобразованиями Гурса (9.7), (9.2). Это χ задается следующей алгебраической формулой:* $\chi = (-\vartheta_1\vartheta_2 z_2^2 z_3^2 + 2\vartheta_1\vartheta_2 z_2^2 z_3 v_2 + \vartheta_1\vartheta_2 z_2^2 v_1^2 - 2\vartheta_1\vartheta_2 z_2^2 v_1 v_2 + 2\vartheta_1\vartheta_2 z_2 z_3^2 \widehat{z}_1 - 2\vartheta_1\vartheta_2 z_2 z_3 \widehat{z}_1 v_1 - 2\vartheta_1\vartheta_2 z_2 z_3 \widehat{z}_1 v_2 + 2\vartheta_1\vartheta_2 z_2 \widehat{z}_1 v_1 v_2 + \vartheta_1 z_2^4 \vartheta_3 - 2\vartheta_1 z_2^3 \vartheta_3 \widehat{z}_1 + \vartheta_1 z_2^2 \vartheta_3 \widehat{z}_1^2 + \vartheta_2^2 z_1^2 z_3^2 - 2\vartheta_2^2 z_1^2 z_3 v_2 + \vartheta_2^2 z_1^2 v_2^2 - \vartheta_2 z_1^2 z_2^2 \vartheta_3)/(z_2^2(\vartheta_1 z_2^2 - 2\vartheta_1 z_2 \widehat{z}_1 + \vartheta_1 \widehat{z}_1^2 - \vartheta_2 z_1^2))$; *здесь* $z_i = \sqrt{(\vartheta_i)_x}$, $v_i = \sqrt{(\eta_i)_x}$, $\widehat{z}_1 = \sqrt{(\widehat{\vartheta}_1)_x}$.

Доказательство. Используя (9.2), мы получаем два набора соотношений для $\widehat{\widehat{z}} = \sqrt{\chi_x}$, поскольку χ связана двумя ромбическими диаграммами, построенными из $\widehat{\vartheta}$, η_1 и $\widehat{\vartheta}_2$, η_2 соответственно. Мы можем найти требуемую алгебраическую формулу для $\widehat{\widehat{z}}$ из этих двух наборов; используя (9.7), получаем алгебраическую формулу для χ. Прямой (хотя и длинной) выкладкой, которую мы оставляем читателю в качестве упражнения, можно проверить, что найденная функция χ удовлетворяет всем необходимым уравнениям.

Как и в § 8, отметим, что диаграммы рис. 12, 13 позволяют получать композиции произвольных двух (трех) преобразований Гурса; это вытекает из обратимости преобразования (задача 8).

Полученные нами формулы, как очевидно, слишком сложны. В замечательной работе [36] Ж. Драш показал, как их упростить, введя вспомогательную функцию. Именно пусть ϑ_1 — решение уравнения $(\mathcal{GN})$, тогда общее решение преобразованного уравнения Гурса

$$\widehat{\vartheta}_{xy} = 2\sqrt{\lambda_1 \widehat{\vartheta}_x \widehat{\vartheta}_y}, \tag{9.8}$$

с $\lambda_1 = \lambda - (\ln\vartheta_1)_{xy}$, $\sqrt{\lambda_1} = \pm\left(\sqrt{\lambda} - \sqrt{(\vartheta_1)_x(\vartheta_1)_y}/\vartheta_1\right)$ дается формулой

$$\widehat{\vartheta} = \vartheta - \frac{\sigma^2}{\vartheta_1}, \tag{9.9}$$

где ϑ — общее решение исходного уравнения $(\mathcal{GN})$, а σ определяется из совместной системы

$$\begin{cases} \sigma_x &= \sqrt{(\vartheta)_x(\vartheta_1)_x}, \\ \sigma_y &= \sqrt{(\vartheta)_y(\vartheta_1)_y}. \end{cases} \tag{9.10}$$

Несложно показать, что решение линейного уравнения $(\mathcal{GL})$, соответствующего преобразованному уравнению (9.8) и исходным формулам преобразования, данным Гурса ([44]), находится по формуле $\widehat{z} = \sqrt{(\widehat{\vartheta})_x} = \sqrt{\vartheta_x} - \sigma\sqrt{(\vartheta_1)_x}/\vartheta_1$.

Рассмотрим ромбическую диаграмму (рис. 12). Как было показано выше, мы можем считать, что $\widehat{\vartheta}_2 = \widehat{\vartheta}\vartheta_1/\vartheta_2$.

Поскольку $\widehat{\vartheta} = \vartheta_2 - \frac{\sigma^2}{\vartheta_1}$, то $\widehat{\vartheta}_2 = \frac{\widehat{\vartheta}\vartheta_1}{\vartheta_2} = \vartheta_1 - \frac{\sigma^2}{\vartheta_2}$. Тем самым получена упрощенная формула ромба (ср. теорему 9.1 и следствие 9.2), включающая одну квадратуру (9.10).

Рассмотрим теперь кубическую диаграмму (рис. 13).

Теорема 9.4. *Если заданы три решения ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 начального уравнения (λ_0) и найдены решения σ, $\overline{\sigma}$, $\overline{\overline{\sigma}}$ соответствующих ромбических систем (9.10)*

$$\begin{cases} \sigma_x = \sqrt{(\vartheta_1)_x(\vartheta_2)_x}, \\ \sigma_y = \sqrt{(\vartheta_1)_y(\vartheta_2)_y}, \end{cases} \begin{cases} \overline{\sigma}_x = \sqrt{(\vartheta_1)_x(\vartheta_3)_x}, \\ \overline{\sigma}_y = \sqrt{(\vartheta_1)_y(\vartheta_3)_y}, \end{cases} \begin{cases} \overline{\overline{\sigma}}_x = \sqrt{(\vartheta_2)_x(\vartheta_3)_x}, \\ \overline{\overline{\sigma}}_y = \sqrt{(\vartheta_2)_y(\vartheta_3)_y}, \end{cases} \tag{9.11}$$

(а значит, и решения $\widehat{\vartheta}$, η_1 уравнения (λ_1) и $\widehat{\vartheta}_2$, η_2 — уравнения (λ_2) по формулам (9.9)), то существует единственное решение χ четвертого уравнения Гурса (λ_{12}), связанное с обеими $\widehat{\vartheta}$, $\widehat{\vartheta}_2$, преобразованиями Гурса (9.8), (9.9), (9.10). Это χ задается следующей алгебраической формулой:

$$\chi = \eta_1 - \frac{\widehat{\sigma}^2}{\widehat{\vartheta}} = \eta_2 - \frac{\widehat{\widehat{\sigma}}^2}{\widehat{\vartheta}_2}, \quad \widehat{\sigma} = \overline{\overline{\sigma}} - \frac{\sigma\overline{\sigma}}{\vartheta_1}, \quad \widehat{\widehat{\sigma}} = \overline{\sigma} - \frac{\sigma\overline{\overline{\sigma}}}{\vartheta_2}. \tag{9.12}$$

10. Симметрии цепочек преобразований Лапласа и интегрируемые экспоненциальные системы

Задача 10. Докажите, что общее уравнение Лапласа (3.1) сводится к уравнению Мутара ($\mathcal{M}$) мультипликативным преобразованием если и только если $h \equiv k$.

Задача 11. Используя рекуррентную формулу (3.7), покажите, что цепочка инвариантов Лапласа для уравнения Мутара обладает свойством симметрии $h_i = h_{-i-1}$.

Естественно задаться следующим вопросом: для каких уравнений Лапласа цепочка инвариантов Лапласа симметрична? Уточним, что мы понимаем под симметрией в данном случае. Представим, что мы расставили инварианты Лапласа $h_i(x, y)$ в целых числах (с соответствующими номерами i) вещественной прямой. Будем говорить, что цепочка h_i *симметрична* относительно какой-либо точки α этой прямой, если инварианты, находящиеся на равных расстояниях от α (по разные стороны от нее) равны. Очевидно, что α может быть лишь целым $\alpha = k \in \mathbb{Z}$ или полуцелым $\alpha = k - \frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Легко видеть, что второй случай приводит к уравнению Мутара. Действительно, $h_k = h_{k-1}$, т.е. инварианты Лапласа одного из уравнений в цепочке преобразований Лапласа (3.8), а именно (E_k), совпадают. В соответствии с утверждением задачи 10 это означает, что (E_k) приводится к уравнению Мутара мультипликативным преобразованием.

Оставшийся тип симметрии после перенумерации уравнений в цепочке преобразований Лапласа приводится к случаю $\alpha = 0$, и мы имеем $h_i = h_{-i}$. Этот случай был изучен Э. Гурса в работах [44, 45]. Оказывается, что уравнение Лапласа с условием $h_1 = h_{-1}$ (в силу рекуррентного соотношения (3.7) это автоматически повлечет $h_i = h_{-i}$) приводится к виду ($\mathcal{GL}$).

Задача 12. Докажите последнее утверждение.

Установленное общее для уравнений Мутара и Гурса свойство симметричности цепочки инвариантов Лапласа и объясняет сходство свойств их преобразований.

Дальнейшие параграфы посвящены одному красивому применению преобразований *линейных* уравнений, изучавшихся выше (уравнение Мутара ($\mathcal{M}$), Гурса ($\mathcal{GL}$) и общее уравнение Лапласа (3.1)), к интегрированию *нелинейных* систем уравнений с частными производными, встречающихся в современной математической физике (так называемые цепочки Тоды и их обобщения). Ключевым фактом здесь является рекуррентное соотношение (3.10):

$$h_{i+1} = 2h_i - h_{i-1} - (\ln h_i)_{xy}, \tag{10.1}$$

которое мы получили выше. Рассмотрим (10.1) как систему дифференциальных уравнений второго порядка на бесконечное количество неизвестных величин $h_i(x, y)$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Оказывается, эта система после замены $h_i = \exp(\vartheta_i - \vartheta_{i-1})$ переходит в известную в математической физике «двумеризованную» цепочку Тоды

$$(\vartheta_i)_{xy} = \exp(\vartheta_i - \vartheta_{i-1}) - \exp(\vartheta_{i+1} - \vartheta_i). \tag{10.2}$$

Разумно изучать различные редукции системы (10.1) (или (10.2)), приводящие к конечным системам уравнений. Например, простейшей редукцией будет изучавшиеся еще в конце XIX в. Г. Дарбу [34] конечные цепочки преобразований Лапласа, т.е. уравнения Лапласа (3.1), для которых после конечного числа как X-, так и Y-преобразований Лапласа получаются уравнения с одним из инвариантов Лапласа, равным 0, что приводит к невозможности продолжать цепочку преобразований Лапласа в соответствующих направлениях. С точки зрения цепочки уравнений (10.1) это означает, что существуют такие номера $n > 0$, $-m < 0$, что $h_n = h_{-m} = 0$, и (10.1) превращается в систему из $n + m - 1$ уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l}(\ln h_{-m+1})_{xy} = 2h_{-m+1} - h_{-m+2},\\ (\ln h_{-m+2})_{xy} = 2h_{-m+2} - h_{-m+1} - h_{-m+3},\\ \qquad \dots\\ (\ln h_{n-2})_{xy} = 2h_{n-2} - h_{n-3} - h_{n-1},\\ (\ln h_{n-1})_{xy} = 2h_{n-1} - h_{n-2}.\end{array}\right. \tag{10.3}$$

Например, при $m = n = 1$ получаем одно уравнение $(\ln h_0)_{xy} = 2h_0$ или, после подстановки $h_0 = e^u$,

$$u_{xy} = 2e^u. \tag{10.4}$$

Последнее уравнение получило название *уравнения Лиувилля* в честь французского математика XIX в. Ж. Лиувилля (1809–1882), впервые получившего его полное решение [55]

$$u = \ln \frac{X'Y'}{(X+Y)^2}, \tag{10.5}$$

где $X(x)$ — произвольная функция переменной x, а $Y(y)$ — произвольная функция переменной y. Можно изучать дальнейшие редукции системы (10.3), налагая, например, условие симметричности цепочки инвариантов Лапласа относительно целой или полуцелой точки α. Так, при $\alpha = 0$ и $n = m = 2$ имеем $h_2 = h_{-2} = 0$, $h_1 = h_{-1} = e^{v_1}$, $h_0 = e^{v_0}$,

$$\left\{\begin{array}{l}(v_0)_{xy} = 2e^{v_0} - 2e^{v_1},\\ (v_1)_{xy} = 2e^{v_1} - e^{v_0}.\end{array}\right. \tag{10.6}$$

Аналогично, при $\alpha = -1/2$, $n = 2$, $m = 3$, $h_2 = h_{-3} = 0$ $h_0 = h_{-1} = e^{v_0}$, $h_1 = h_{-2} = e^{v_1}$,

$$\left\{\begin{array}{l}(v_0)_{xy} = e^{v_0} - e^{v_1},\\ (v_1)_{xy} = 2e^{v_1} - e^{v_0}.\end{array}\right. \tag{10.7}$$

Указанные конечномерные редукции (и некоторые другие, которые мы опишем ниже) допускают явную формулу для решений, обобщающую формулу Лиувилля (10.5). Подобные системы, обладающие явными формулами общего решения, в последнее время активно изучались (см., например, работы [12],

[14], [23]). В частности, в [23] была получена полная классификация таких систем, принадлежащих к общему классу экспоненциальных систем «типа I».

Прежде всего, преобразуем системы (10.3), (10.6), (10.7) к виду, принятому в [23]. Обозначим правую часть i-го уравнения (10.3) через w_i: $(\ln h_i)_{xy} = 2h_i - h_{i+1} - h_{i-1} = w_i = \sum_j A_{ij}h_j$,

$$A_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{при } i = j, \\ -1 & \text{при } i = j \pm 1, \\ 0 & \text{во всех других случаях,} \end{cases} \tag{A_n}$$

и для краткости далее положим $v_s = \ln h_s$. Легко проверить, что матрица $||A_{ij}||$ невырождена и мы можем выразить h_i через w_j: $h_i = \sum_j (A^{-1})_{ij} w_j = \sum_j (A^{-1})_{ij}(v_j)_{xy} = \Big(\sum_j (A^{-1})_{ij} v_j\Big)_{xy}$. Обозначим $\sum_j (A^{-1})_{ij} v_j = u_i \Longrightarrow v_i = \sum_j A_{ij} u_j$, откуда получаем систему $\{(u_i)_{xy} = h_i\}$ или

$$(u_i)_{xy} = e^{v_i} = \exp\left(\sum_j A_{ij} u_j\right). \tag{10.8}$$

Если мы налагаем на (10.3) требование симметрии величин h_i относительно целой точки $\alpha = 0$, то аналогичные рассуждения приводят к системе вида (10.8) с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & \vdots \\ \vdots & & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{B_n}$$

Требование симметричности относительно полуцелой точки приводит после тривиальной замены к системе того же вида с матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & \vdots \\ \vdots & & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \qquad (C_n)$$

Системы вида (10.8) с матрицами, удовлетворяющими условиям

$$A_{ii}=2, \quad A_{ij}=0 \Leftrightarrow A_{ji}=0, \quad A_{ij}=0,-1,-2,\dots (i\neq j) \tag{10.9}$$

названы в [23] экспоненциальными системами типа I; матрицы A, удовлетворяющие условию (10.9), называются обобщенными матрицами Картана. Неожиданным фактом, доказанным в [23], является то, что для «интегрируемости в явном виде» нераспадающейся системы (10.8) необходимо и достаточно, чтобы матрица A являлась матрицей Картана (в смысле, принятом в теории алгебр Ли) некоторой простой алгебры Ли (см. соответствующие определения, например, в [2, 8]). В частности, приведенные выше матрицы Картана (A_n), (B_n), (C_n) соответствуют классическим простым алгебрам $sl(n+1,\mathbb{C})$, $so(2n+1,\mathbb{C})$, $sp(n,\mathbb{C})$. Полный список простых (комплексных) алгебр Ли включает еще одну бесконечную серию D_n ($so(2n,\mathbb{C})$) и пять исключительных алгебр E_6, E_7, E_8, F_4, G_2. Представляет интерес выяснить, какие из матриц Картана, соответствующие указанным алгебрам, могут быть получены из конечных цепочек инвариантов Лапласа (10.1) с помощью некоторых редукций. Кроме указанных выше редукций для серий (A_n), (B_n), (C_n), удается найти редукцию, дающую матрицу Картана $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, соответствующую алгебре G_2: для этого возьмем конечную цепочку Лапласа, начинающуюся с уравнения Мутара, т. е. симметричную относительно $\alpha=-\frac{1}{2}$ с условиями: $h_3=h_{-4}=0$, $h_{-1}=h_0$, $h_{-2}=h_1$, $h_2=h_{-3}=\frac{1}{2}h_0$.

Легко проверить, что эти условия совместимы с системой (10.3) ($n = 3$, $m = 4$) и соответствующая редуцированная система имеет вид:

$$\begin{cases} (\ln h_0)_{xy} = h_0 - h_1, \\ (\ln h_1)_{xy} = -\frac{3}{2}h_0 + 2h_1. \end{cases} \tag{10.10}$$

После замены $\bar{h_0} = \frac{1}{2}h_0$ получаем систему с матрицей типа G_2.

Использовавшаяся в [14] техника интегрирования систем (10.8) с матрицами Картана простых алгебр Ли достаточно сложна. Оказывается, полученные в XIX — начале XX вв. результаты Дарбу, Мутара и Гурса дают простые методы получения явных формул решения для случаев матриц (A_n), (B_n), (C_n). Последующие параграфы посвящены изложению этих результатов.

Отметим далее, что подходящей редукцией исходной бесконечной системы (10.1) можно получать другие системы, также интегрируемые, но намного более сложным образом. Например, можно предположить, что цепочка инвариантов Лапласа h_i периодична с периодом $N \in \mathbb{N}$: $h_{i+N} = h_i$. Так, при $N = 2$ получаем следующую конечномерную систему:

$$\begin{cases} (\ln h_0)_{xy} = 2h_0 - 2h_1, \\ (\ln h_1)_{xy} = 2h_1 - 2h_0. \end{cases} \tag{10.11}$$

Как очевидно, из нее вытекает соотношение $(\ln h_0 h_1)_{xy} = 0$, т. е. $h_0 \cdot h_1 = \varphi(x) \cdot \psi(y)$. После соответствующей замены независимых переменных $\bar{x} = \int \sqrt{\varphi(x)}\, dx$, $\bar{y} = \int \sqrt{\psi(y)}\, dy$, как легко проверить, инварианты Лапласа перейдут в $\bar{h_i} = \frac{h_i}{\sqrt{\varphi\psi}}$, т. е. $\bar{h_0}\bar{h_1} = 1$. Из (10.11) видим, что $u = \ln(4\bar{h_0})$ удовлетворяют известному в теории солитонов аналогу интегрируемого уравнения sine-Gordon:

$$u_{xy} = \frac{e^u - e^{-u}}{2} = \operatorname{sh} u.$$

Периодические цепочки преобразований Лапласа с периодами $n = 2, 3, 4, 6$ активно изучались в теории сопряженных сетей координат на поверхностях евклидова пространства в классической дифференциальной геометрии (Darboux, Tzitzéica, Demoulin, Rozet и др.).

Кроме условий периодичности, можно далее наложить также условие симметрии. Например, при симметрии типа Мутара ($\alpha = -1/2$) и периоде $N = 3$ получаем систему 2-х уравнений на инварианты $h_0 = h_{-1} = h_2 = h_3$, и $h_1 = h_{-2}$:

$$\begin{cases} (\ln h_0)_{xy} = h_0 - h_1, \\ (\ln h_1)_{xy} = 2h_1 - 2h_0, \end{cases}$$

откуда $(\ln h_0^2 h_1)_{xy} = 0$ и после соответствующей замены независимых переменных мы можем положить $\bar{h_1} = (\bar{h_0})^{-2}$. Для $u = \ln \bar{h_0}$ имеем тем самым известное уравнение Цицейки (Буллофа-Додда-Жибера-Шабата)

$$u_{xy} = e^u - e^{-2u}.$$

Заметим далее, что в данном случае (и вообще всегда для периодических цепочек с симметрией типа Мутара и нечетном N) одновременно имеется симметрия типа Гурса относительно точки $\alpha = (N-1)/2$.

11. Метод Дарбу интегрирования серии A_n

Напомним, что данная серия интегрируемых систем с матрицей Картана вида (A_n) (см. стр. 50) соответствует цепочкам Лапласа (10.1) с условием конечности: $h_n = h_{-m} = 0$. Следовательно, приведенные в § 5 формулы Дарбу для конечных в обе стороны цепочек Лапласа должны дать общее решение нелинейной системы (10.3). Действительно, будем считать, что мы задали произвольные наборы линейно независимых функций $\beta_i(y)$ и линейно независимых функций $C_i(x)$, $i = 1, \ldots, m+n+1$. Формула (5.10) дает выражение для $\beta = e^{-\int b_n dx}$ и, следовательно, для $b_n(x, y) = -(\ln \beta)_x$ — ненулевого коэффициента уравнения $v_{xy} + b_n(x, y)v_y = 0$, которое имеет общее решение вида (5.4). Это уравнение — конечное в цепочке Лапласа, т.к. его инварианты равны $h_n = 0$, $k_n = (b_n)_y$. Как вытекает из рассмотрения цепочек Лапласа в § 5, проделав Y-преобразование Лапласа $(m+n-1)$ раз, получим уравнение Лапласа с инвариантами $h_{-m+1} \neq 0$, $k_{-m+1} = 0$, т.е. цепочка Лапласа будет конечной. Обратно, как показано в § 5, все конечные цепочки инвариантов Лапласа, т.е. решения (10.3), могут быть получены таким способом.

Найденные изложенным сейчас методом формулы для инвариантов Лапласа, решающие задачу интегрирования экспоненциальной системы (10.3), как очевидно, получаются при больших m и n достаточно громоздкими. Дарбу предложил также упрощенный метод, позволяющий выписывать конечные цепочки (3.9) напрямую. Мы изложим этот метод в § 14.

12. Метод Мутара интегрирования серии C_n

Основой данного метода служит наблюдение, сделанное Мутаром [59]: если применить найденное им преобразование к уравнению $(\mathcal{M})$ с конечной цепочкой инвариантов Лапласа (3.9) длины $2n$ (в силу симметрии типа Мутара цепочки число ненулевых инвариантов в ней четно), то новое уравнение Мутара будет, *вообще говоря*, иметь цепочку длины $2n+2$; лишь при специальном подборе преобразующей функции ω длина цепочки может остаться прежней или уменьшиться на 2.

В данном параграфе мы и изложим предложенный Мутаром метод, позволяющий рекуррентным образом найти явный вид инвариантов Лапласа h_i в конечной цепочке (10.1) с симметрией типа Мутара, зависящий от $2n$ функций одного переменного, что соответствует на языке теории интегрируемых экспоненциальных систем решениям систем с матрицей Картана типа (C_n). Однако, как отмечает Дарбу [34, § 396], Мутар не доказал, что его выражения дают *абсолютно все* решения поставленной задачи, ограничившись лишь доказательством (на простом примере), что при общем выборе преобразующей функции длина цепочки увеличивается (причем, как ясно из построения, не более, чем на 2). Используя свой упрощенный метод, Дарбу предложил более простые рекуррентные формулы для h_i и доказал полноту метода Мутара (см. ниже § 14).

Итак, предположим, что для исходного уравнения $(\mathcal{M})$ с коэффициентом $\lambda_0 = \lambda(x, y)$ в цепочке (10.1) верно $h_n = h_{-n-1} = 0$ и мы уже имеем явное выражение для λ_0 и общего решения $u = L_1(X) + L_2(Y)$, $L_1(X) = A_0(x, y)X + A_1(x, y)X' + \ldots + X^{(n)}$, $L_2(Y) = B_0(x, y)Y + B_1(x, y)Y' + \ldots + Y^{(n)}$; A_i, B_i — фиксированные (для фиксированного $\lambda(x, y)$), $X(x)$, $Y(y)$ — произвольные функции соответствующих переменных. Отметим равенство единице коэффициентов при старших производных $X^{(n)}$, $Y^{(n)}$ — это легко проверить подстановкой в $(\mathcal{M})$ и заменой (при необходимости) функций $X(x)$, $Y(y)$.

После преобразования (8.1), (8.2) с преобразующей функцией $\omega = L_1(\widetilde{X}) + L_2(\widetilde{Y})$ получаем произвольное решение ϑ (оно будет общим решением в силу обратимости преобразования Мутара, см. задачу 2). Наша цель — показать, что это решение также будет выражаться линейно через две (другие) произвольные функции $\widehat{X}(x)$, $\widehat{Y}(y)$ и их производные до порядка $n + 1$. Причем, что существенно, этот порядок в общем случае нельзя уменьшить — это видно на примере. Эти факты и будут означать (в силу леммы 4.1), что преобразованное уравнение Мутара будет, во-первых, иметь конечную цепочку Лапласа и, во-вторых, ее длина в каждую сторону увеличится на единицу.

Для простоты мы будем рассматривать решение φ, зависящее только от $X(x)$. Для второй его части, зависящей от Y, можно применить аналогичное рассуждение.

Подставим φ в систему (8.2), определяющую преобразованное решение ϑ:

$$-(\omega\vartheta)_x = \omega X^{(n+1)} + \underbrace{\Bigl(\omega A_{n-1} - \omega_x\Bigr)}_{\omega_1} X^{(n)} +$$

$$+\underbrace{\Big(\omega(A_{n-1})_x+\omega A_{n-2}-\omega_x A_{n-1}\Big)}_{\omega_2}X^{(n-1)}+$$

$$+\ldots+\underbrace{\Big(\omega(A_{n-k})_x+\omega A_{n-k-1}-\omega_x A_{n-k}\Big)}_{\omega_{k+1}}X^{(n-k)}+\ldots+$$

$$+\underbrace{\Big(\omega(A_0)_x-\omega_x A_0\Big)}_{\omega_{n+1}}X.$$

$$-(\omega\vartheta)_y=\underbrace{\omega_y}_{\pi_1}X^{(n)}+\underbrace{\Big(\omega_y A_{n-1}-\omega(A_{n-1})_y\Big)}_{\pi_2}X^{(n-1)}+\ldots+$$

$$+\underbrace{\Big(\omega_y A_{n-k}-\omega(A_{n-k})_y\Big)}_{\pi_{k+1}}X^{(n-k)}+\ldots+\underbrace{\Big(\omega_y A_0-\omega(A_0)_y\Big)}_{\pi_{n+1}}X.$$

Дифференцируя первое из равенств по y, а второе — по x и приравнивая результаты, находим следующие уравнения, связывающие ω_i и π_k:

$$\begin{cases} \frac{\partial\omega}{\partial y}=\pi_1,\\ \frac{\partial\omega_1}{\partial y}=\frac{\partial\pi_1}{\partial x}+\pi_2,\\ \ldots\\ \frac{\partial\omega_n}{\partial y}=\frac{\partial\pi_n}{\partial x}+\pi_{n+1},\\ \frac{\partial\omega_{n+1}}{\partial y}=\frac{\partial\pi_{n+1}}{\partial x}. \end{cases} \tag{12.1}$$

Поэтому $\pi_{k+1}=(\omega_k)_y-(\pi_k)_x=(\omega_k)_y-\frac{\partial}{\partial x}\left((\omega_{k-1})_y-(\pi_{k-1})_x\right)=\ldots=\frac{\partial}{\partial y}\Big(\omega_k-\frac{\partial}{\partial x}\omega_{k-1}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\omega_{k-2}-+(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial x^k}\omega\Big)=\frac{\partial}{\partial y}\Omega_k$, $\forall k=0,\ldots,n$, где мы обозначим $\Omega_k=\omega_k-\frac{\partial}{\partial x}\omega_{k-1}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\omega_{k-2}-+(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial x^k}\omega$, $\Omega_0=\omega$. Из последнего уравнения системы (12.1) получаем $\frac{\partial}{\partial y}\Omega_{n+1}=0$. Окончательно имеем следующую систему соотношений на величины Ω_i:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y}\Omega_k = \pi_{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \\ \frac{\partial}{\partial y}\Omega_{n+1} = 0. \end{cases}$$

Видим, что Ω_{n+1} не зависит от y и $\Omega_k + (\Omega_{k-1})_x = \omega_k$. Положим $\tau = \omega X^{(n)} + \Omega_1 X^{(n-1)} + \ldots + \Omega_n X$. Вычислим $\frac{\partial}{\partial x}\tau = \omega X^{(n+1)} + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x} + \Omega_1\right) X^{(n)} + \left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial x} + \Omega_2\right) X^{(n-1)} + \ldots + \left(\frac{\partial\Omega_{n-1}}{\partial x} + \Omega_n\right) X' + \frac{\partial\Omega_n}{\partial x} X = \omega X^{(n+1)} + \omega_1 X^{(n)} + \ldots + \omega_k X^{(n-k)} + \ldots + \omega_n X' + \frac{\partial\Omega_n}{\partial x} X$. Аналогично $\frac{\partial}{\partial y}\tau = \pi_1 X^{(n)} + \ldots + \pi_k X^{(n-k)} + \ldots + \pi_{n+1} X$. Отсюда получаем, что $\frac{\partial(\omega\vartheta+\tau)}{\partial x} = -\Omega_{n+1} X$, $\frac{\partial(\omega\vartheta+\tau)}{\partial y} = 0$, или $\omega\vartheta + \tau = -\int_{x_0}^{x} \Omega_{n+1} X\, dx$. Подставив сюда τ, выражаем $\vartheta = -X^{(n)} - \frac{\Omega_1}{\omega} X^{(n-1)} - \ldots - \frac{\Omega_n}{\omega} X - \frac{1}{\omega}\int \Omega_{n+1} X\, dx$. Поскольку Ω_{n+1} не зависит от y, $\int \Omega_{n+1} X\, dx$ есть произвольная функция переменной x и мы можем ввести новую произвольную функцию вместо старой X: $\widehat{X}(x) = \frac{-1}{\Omega_{n+1}}\int_{x_0}^{x} \Omega_{n+1} X\, dx$. Тогда $X = -\widehat{X}' - \widehat{X}(\ln\Omega_{n+1})_x, \ldots, X^{(n)} = -\widehat{X}^{(n+1)} - \widehat{X}^{(n)}(\ln\Omega_{n+1})_x - \ldots - \widehat{X}\frac{\partial^n}{\partial x^n}(\ln\Omega_{n+1})$, откуда и получаем требуемое выражение $\vartheta = \widehat{X}^{(n+1)} + F_1\widehat{X}^{(n)} + \ldots + F_{n+1}\widehat{X}$. Оно гарантирует, что цепочка Лапласа (3.9) для преобразованного уравнения конечна и имеет длину не более $n+1$ в каждую из сторон.

Задача 13. Докажите явным вычислением, что цепочка Лапласа для уравнения $u_{xy} = \frac{n(n+1)}{(x+y)^2}u$ имеет длину ровно n в каждую сторону, а при выборе частного решения $\omega = (x+y)^{n+1}$ это уравнение преобразовывается в $u_{xy} = \frac{(n+1)(n+2)}{(x+y)^2}u$.

Из приведенной задачи и вытекает, что в общем случае цепочка Лапласа действительно удлинняется.

Подведем итоги: стартуя с тривиального уравнения $(\mathcal{M})$ с нулевым потенциалом $\lambda \equiv 0$: $u_{xy} = 0$ и общим решением $u = X(x) + Y(y)$, мы можем рекуррентно находить выражение для потенциала $\lambda(x,y)$ уравнения $(\mathcal{M})$, имеющего конечную цепочку преобразований Лапласа, вместе с общим решением $u(x,y)$ этого уравнения. В процессе вычислений нам не нужно будет прибегать к квадратурам, все операции, хотя и трудоемкие, потребуют лишь складывать, вычитать, умножать, делить и дифференцировать и полностью алгоритмичны. Однако так мы находим лишь два центральных инварианта Лапласа $h_0 = k_0 = h_{-1}$ в конечной цепочке (3.9). Остальные вычисляются с использованием формулы (10.1).

Мутар приводит в качестве примера общее решение

$$u = \frac{X_1'}{X'} + \frac{Y_1'}{Y'} - 2\frac{X_1 + Y_1}{X + Y} \tag{12.2}$$

для $(\mathcal{M})$ с потенциалом $\lambda = 2\frac{X'Y'}{(X+Y)^2}$ $(h_1 = h_{-2} = 0)$; соответственно отсюда он получает потенциалы с длиной цепочки (3.9), равной 4, в нескольких различных формах:

$$\lambda = \left(\frac{X_1'}{X'} + \frac{Y_1'}{Y'} - 2\frac{X_1 + Y_1}{X + Y}\right)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[\left(\frac{X_1'}{X'} + \frac{Y_1'}{Y'} - 2\frac{X_1 + Y_1}{X + Y}\right)^{-1}\right],$$

$$\lambda = -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\ln\left(\left(\frac{X_1'}{X'} + \frac{Y_1'}{Y'}\right)(X + Y) - 2(X_1 + Y_1)\right),$$

$$\lambda = -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\ln\left(\left(\frac{X_1'}{X'} + \frac{Y_1'}{Y'}\right)(X_1 + Y_1) - 2\frac{X_1'}{X'}\frac{Y_1'}{Y'}(X + Y)\right).$$

Здесь всюду X, X_1 — две произвольные (независимые) функции от x; Y, Y_1 — две произвольные функции от y.

Можно несколько упростить описанную рекуррентную процедуру, если прибегнуть к «формуле кубов» (8.5). Она позволяет найти общее выражение для решения ϑ' уравнения Мутара, возникающего на шаге $(k+2)$ процесса, если нам известны общие решения на шаге k (это ϑ, ω_1 и ω_2 на рис. 11) и шаге $(k+1)$ (это ϑ_1, ϑ_2, ω_1' и ω_2'). Как показал Дарбу [34], можно получить более явные формулы для решения задачи интегрирования систем серии (C_n). Ниже в параграфах 13, 14 мы излагаем упрощенный метод Дарбу. В Заключении (§ 20) мы более подробно обсудим другие возможные упрощения в рекуррентной процедуре Мутара.

13. Сопряженные обыкновенные дифференциальные операторы

Прежде чем изложить упрощенный метод Дарбу нахождения общего решения экспоненциальных систем типа C_n, приведем необходимые сведения из теории антисамосопряженных линейных обыкновенных дифференциальных операторов (ЛОДО) нечетного порядка. Пусть $L(u) = \lambda_n(x,y)u^{(n)} + \lambda_{n-1}(x,y)u^{(n-1)} + \ldots + \lambda_1(x,y)u' + \lambda_0(x,y)u$ — ЛОДО. Тогда, интегрируя по частям выражение $\int vLu\,dx$, получаем

$$\int vLu\,dx = \int uL^*v\,dx + B(u,v), \tag{13.1}$$

где $L^*v = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\Big(\lambda_n v\Big) + \ldots - \frac{d}{dx}\Big(\lambda_1 v\Big) + \lambda_0 v = (-1)^n \lambda_n \frac{d^n}{dx^n} v + \mu_{n-1}v^{(n-1)} + \mu_1 v' + \mu_0 v$ — сопряженный к L оператор, а $B(u,v)$ — билинейное по u, v дифференциальное выражение порядка $n-1$. Заметим, что (13.1) определяет билинейную форму $B(u,v)$ с точностью до прибавления постоянной. Чтобы зафиксировать ее, положим $B(0,0) = 0$.

Как известно, $(L^*)^* = L$ и, если мы знаем фундаментальный базис $u_1(x)$, $u_2(x)$, $\ldots$, $u_n(x)$ исходного уравнения $Lu = 0$, то мы можем следующим образом получить фундаментальный базис $v_1(x)$, $v_2(x)$, $\ldots$, $v_n(x)$ решений сопряженного уравнения $L^*v = 0$.

Пусть $W = \begin{vmatrix} u_1 & u_1' & \ldots & u_1^{(n-1)} \\ \vdots & & & \\ u_n & u_n' & \ldots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = A_{i0}u_i + A_{i1}u_i' + \ldots + A_{i,n-1}u_i^{(n-1)} = \vartheta_i(u_i)$ — разложение вронскиана по i-й строке. $\vartheta_i(u)$ обращается в ноль при подстановке $u = u_j$, $j \neq i$. Следовательно, $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{W}\vartheta_i(u)\right) = 0$ — линейное дифференциальное уравнение порядка n, имеющее те же решения, что и исходное $Lu = 0$, т.е. отличается от него лишь множителем:

$$v_i = \frac{A_{i,n-1}}{\lambda_n W} \tag{13.2}$$

То есть $v_i Lu = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{W}\vartheta(u)\right)$ есть полная производная и $\int v_i Lu\, dx = \frac{1}{W}\vartheta_i(u)$ при любом u. Сравнивая с (13.1), получаем, что v_i — решения сопряженного уравнения и $\frac{1}{W}\vartheta_i(u) = B(u, v_i)$; в частности,

$$B(u_i, v_j) = \delta_{ij}. \tag{13.3}$$

Из элементарных свойств миноров получаем также следующие тождества

$$\begin{cases} v_1 u_1 + \ldots + v_n u_n & = 0, \\ v_1 u_1' + \ldots + v_n u_n' & = 0, \\ \ldots \\ v_1 u_1^{(n-1)} + \ldots + v_n u_n^{(n-1)} & = \frac{1}{\lambda_n}. \end{cases} \tag{13.4}$$

Продифференцировав их, далее имеем

$$\begin{cases} v_1^{(i)} u_1^{(k)} + \ \ldots \ + v_n^{(i)} u_n^{(k)} = 0, \quad i + k < n - 1, \\ \quad \ldots \\ v_1^{(i)} u_1^{(k)} + \ \ldots \ + v_n^{(i)} u_n^{(k)} = \frac{(-1)^i}{\lambda_n}, \quad i + k = n - 1. \end{cases} \tag{13.5}$$

Задача 14. Показать, что частное решение неоднородного уравнения $Lu = f(x)$ имеет вид $u = \sum_i u_i \int v_i f\, dx$.

Если нам известно некоторое решение $u = \alpha(x)$ уравнения $Lu = 0$, мы можем понизить порядок этого уравнения на единицу заменой $u = \alpha \cdot \int \widetilde{u}\, dx$. В полученном уравнении на $\widetilde{u}$ будут присутствовать только производные $\widetilde{u}$ до порядка $n - 1$. Это означает, что мы можем представить исходный оператор в виде $Lu = L_1 \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{\alpha}\right)$, где L_1 — оператор порядка $n-1$. Продолжая по индукции, получим, что любой оператор может быть записан в факторизованном виде

$$L = \frac{1}{\alpha_{n+1}} \cdot \frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{\alpha_n} \cdot \frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{\alpha_{n-1}} \cdots \frac{1}{\alpha_2} \cdot \frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{\alpha_1}. \tag{13.6}$$

Задача 15. Покажите, что соответствующий фундаментальному базису $u_1 = \alpha_1$, $u_2 = \alpha_1 \int \alpha_2 dx$, $\ldots$, $u_n =$

$\alpha_1\int\alpha_2\cdots\int\alpha_n dx\dots dx$ решений $Lu=0$ сопряженный базис решений для $L^*=(-1)^n\frac{1}{\alpha_1}\frac{d}{dx}\frac{1}{\alpha_2}\frac{d}{dx}\cdots\frac{1}{\alpha_n}\frac{d}{dx}\frac{1}{\alpha_{n+1}}$ задается формулами

$$\begin{cases} v_1=(-1)^{n-1}\alpha_{n+1}\int\alpha_n\int\alpha_{n-1}\dots\int\alpha_2 dx\dots dx,\\ v_2=(-1)^{n-2}\alpha_{n+1}\int\alpha_n\int\alpha_{n-1}\dots\int\alpha_3 dx\dots dx,\\ \dots\\ v_n=\alpha_{n+1}. \end{cases}\tag{13.7}$$

Покажем, следуя Дарбу [34, § 374], что для антисамосопряженного оператора $L=-L^*$ нечетного порядка $n=2k-1$ мы можем выбрать α_i в разложении (13.6) так, что $\alpha_1=\alpha_{n+1}$, $\alpha_2=\alpha_n$, $\dots$, $\alpha_k=\alpha_{k+1}$. Из (13.1) видим, что для антисамосопряженных операторов билинейная форма $B(u,v)$ симметрична.

Прежде всего отметим, что при $k=1$ антисамосопряженный оператор имеет вид $L=\lambda(x)\frac{d}{dx}+\frac{(\lambda(x))_x}{2}=\sqrt{(\lambda(x))}\frac{d}{dx}\sqrt{(\lambda(x))}$. Делая индукционный шаг, положим в (13.1) $v=u$, получим в результате $\int uLu\,dx=\frac{1}{2}B(u,u)=\Phi(u)$. Заметим, что $\Phi(u)$ является квадратичным интегралом порядка $2k-2$ исходного уравнения $Lu=0$: на любом его решении u он постоянен, $\Phi(u)=\mathrm{const}$. Из явного вида $B(u,v)$ вытекает, что $\Phi(u)=\frac{1}{2}\lambda_n(x)uu^{(2k-2)}+\Phi_1(u)$, где $\Phi_1(u)$ — квадратичный полином от u, u', $\dots$, $u^{(2k-3)}$. Поэтому, если мы возьмем решение $\alpha(x)$ уравнения $Lu=0$, которое в некоторой точке x_0 имеет начальные данные Коши $\alpha(x_0)=\alpha'(x_0)=\ldots=\alpha^{(2k-3)}(x_0)=0$, $\alpha^{(2k-2)}(x_0)\neq 0$, то $L\alpha=0$, $\Phi(\alpha)=0$. Покажем, что выбранное $\alpha_1=\alpha$ и дает факторизацию

$$Lu=\frac{1}{\alpha_1}\frac{d}{dx}L_1\frac{d}{dx}\frac{1}{\alpha_1}u,\tag{13.8}$$

с антисамосопряженным оператором L_1 порядка $(2k-3)$. Действительно, $\int\alpha L(\alpha u)\,dx=\frac{1}{2}B(\alpha u,\alpha)=\widetilde{L}u\iff L(\alpha u)=\frac{1}{\alpha}\frac{d}{dx}\widetilde{L}u$. Но при $u\equiv 1$, $\widetilde{L}(1)=\Phi(\alpha)=0$, т.е. $\widetilde{L}=L_1\frac{d}{dx}$, откуда и вытекает (13.8).

По индукции мы получаем, что любой антисамосопряженный оператор представляется в виде

$$L = \frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{\alpha_2} \cdot \frac{d}{dx} \cdots \frac{1}{\alpha_k} \cdot \frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{\alpha_k} \cdot \frac{d}{dx} \cdots \frac{1}{\alpha_2} \cdot \frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{\alpha_1}\ . \quad (13.9)$$

Как вытекает из задачи 15 и соотношений (13.4), соответствующая этому разложению фундаментальная система решений u_1, u_2, $\ldots$, u_{2k-1} удовлетворяет квадратичным соотношениям

$$\Psi(u_1, u_2, \ldots, u_{2k-1}) =$$
$$= u_k^2 - 2u_{k-1}u_{k+1} + 2u_{k-2}u_{k+2} - \ldots + (-1)^{k-1} \cdot 2u_1u_{2k-1} = 0, \quad (13.10)$$

$\Psi(u_1', u_2', \ldots, u_{2k-1}') = 0$, $\ldots$, $\Psi(u_1^{(k-2)}, u_2^{(k-2)}, \ldots, u_{2k-1}^{(k-2)}) = 0$, $\Psi(u_1^{(k-1)}, u_2^{(k-1)}, \ldots, u_{2k-1}^{(k-1)}) = \frac{1}{\lambda_{2k-1}} = \alpha_1^2\alpha_2^2\cdots\alpha_k^2$. Заметим, что, изменив данную фундаментальную систему решений на любую другую, получаем, что между базисными решениями всегда существуют квадратичные соотношения с постоянными коэффициентами $\Psi = \sum_{i,j} \psi_{ij} u_i^{(l)} u_j^{(m)} = 0$, $l+m = 0, 1, \ldots, 2k-3$, $\Psi = \sum_{i,j} \psi_{ij} u_i^{(l)} u_j^{(m)} = \alpha_1^2\alpha_2^2\cdots\alpha_k^2$, $l+m = 2k-2$.

Основываясь на (13.9), Дарбу показывает, как можно рекурсивно выписать общее выражение для коэффициентов антисамосопряженных операторов нечетного порядка вместе с их фундаментальными семействами решений, избегая квадратур.

Для уравнений первого порядка $Lu = \frac{1}{\alpha_1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\alpha_1}u\right) = 0$ ответ очевиден: $u_1 = \alpha_1(x)$. Уравнение третьего порядка

$$Lu = \frac{1}{\alpha_1}\frac{d}{dx}\frac{1}{\alpha_2}\frac{d}{dx}\frac{1}{\alpha_2}\frac{d}{dx}\frac{u}{\alpha_1} = 0 \quad (13.11)$$

подходящей заменой независимой переменной $\overline{x} = \beta(x)$, $\beta' = \alpha_2$, $\frac{1}{\alpha_2}\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\overline{x}}$, приводится к виду $\alpha_2 \cdot \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{d^3}{d\overline{x}^3}\left(\dfrac{u}{\gamma}\right) = 0$ с базисом решений $u_1 = \gamma$, $u_2 = \gamma\overline{x}$, $u_3 = \gamma\overline{x}^2$, $\gamma(\overline{x}) = \alpha_1(x)$. Обратной заменой окончательно получаем $u_1 = \alpha_1(x)$, $u_2 = \alpha_1(x)\beta(x)$, $u_3 = \alpha_1(x)\beta^2(x)$ и $\alpha_2 = \beta'$.

Положим, что мы построили явные выражения для фундаментальной системы решений u_1, u_2, $\ldots$, u_{2n-1} и коэффициентов антисамосопряженного уравнения $Lu = 0$ порядка $2n-1$, включающие n произвольных функций одного переменного и их производные и не содержащие квадратур. Основываясь на формуле (13.9), мы можем найти базис решений общего антисамосопряженного уравнения порядка $2n+1$

$$\frac{1}{\gamma}\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\delta}\ L_{2n-1}\left(\frac{1}{\delta}\,\frac{d}{dx}\,\frac{1}{\gamma}\,u\right)\right\} = 0: \tag{13.12}$$

$U_1 = \gamma$, $U_2 = \gamma\int u_1\delta\,dx$, $\ldots$, $U_{2n} = \gamma\int u_{2n-1}\delta\,dx$, $U_{2n+1} = \gamma\int\beta L_{2n-1}(\beta)\,dx$, где $\beta(x)$ — новая неизвестная функция, введенная вместо δ: $\delta = L_{2n-1}(\beta)$, а самый левый и правый множители в разложении (13.9) для оператора L_{2n-1} равны 1. Поскольку $\int\beta L_{2n-1}(\beta)\,dx = \Phi(\beta)$ и $\int u_i L_{2n-1}(\beta)\,dx = -\int\beta\underbrace{L_{2n-1}(u_i)}_{=0}dx + B(u_i,\beta) = B(u_i,\beta)$ не содержат квадратур, мы получили требуемое выражение для общего антисамосопряженного оператора порядка $2n+1$ и его решений, не содержащее квадратур. Заметим, что L_{2n-1} в (13.12) имеет фундаментальную систему решений u_1, $\ldots$, u_{2n-1} с $u_1 \equiv 1$, поэтому коэффициенты и полная система решений L_{2n+1} зависят от $n-1$ произвольных функций, задающих оператор L_{2n-1} и двух новых произвольных функций $\gamma(x)$, $\beta(x)$, при этом выбором $\gamma = U_1 \equiv 1$ мы можем положить самый левый и правый множители в разложении (13.9) для оператора L_{2n+1} равными 1 — это, как очевидно, будет необходимо на следующем индукционном шагу.

Отметим, что, если исходные u_i удовлетворяли квадратичным соотношениям $B(u_i,u_j) = 0$ при $i+j < 2n$, $B(u_i,u_{2n-i}) = (-1)^{i-1}$, то построенные U_1, $\ldots$, U_{2n+1} удовлетворяют аналогичным соотношениям и квадратичному соотношению $\Psi = U_{n+1}^2 - 2U_nU_{n+2} + \ldots + (-1)^n\cdot 2U_1U_{2n+1} = 0$. Это будет важно для метода Дарбу интегрирования серии C_n.

Дарбу не разбирает аналогичный случай самосопряженного оператора (четного порядка). Мы покажем, как перенести некоторые из вышеизложенных результатов на самосопряженный случай.

Лемма 13.1. *(Дарбу, [34, § 377]) Любой самосопряженный оператор порядка $2n$ представим в виде*

$$L=\frac{d^n}{dx^n}a_n(x)\frac{d^n}{dx^n}+\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\ldots+\frac{d}{dx}a_1(x)\frac{d}{dx}+a_0(x). \tag{13.13}$$

Доказательство. Для операторов порядка 0 это очевидно. Далее делаем индукционный шаг: если $L = A(x)\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} + \ldots$ — оператор порядка $2n$, то оператор $L - \frac{d^n}{dx^n}A(x)\frac{d^n}{dx^n}$, очевидно, самосопряжен и имеет ме́ньший порядок, поэтому по предположению индукции, представим в требуемом виде.

Лемма 13.2. *Любой самосопряженный оператор порядка $2n$ представим в симметричном факторизованном виде*

$$L = \frac{1}{\alpha_1}\frac{d}{dx}\frac{1}{\alpha_2}\frac{d}{dx}\cdots\frac{1}{\alpha_n}\frac{d}{dx}\frac{1}{\alpha_{n+1}}\frac{d}{dx}\frac{1}{\alpha_n}\frac{d}{dx}\cdots\frac{1}{\alpha_2}\frac{d}{dx}\frac{1}{\alpha_1}\ . \tag{13.14}$$

Доказательство. Данный случай даже проще, чем антисамосопряженный: достаточно выбрать $\alpha_1 = u$ — любое решение соответствующего уравнения $Lu = 0$; для самосопряженного оператора $L_1 = \alpha_1 \cdot L \cdot \alpha_1$ в представлении (13.13) отсутствует последнее слагаемое, поскольку $L_1(1) = 0$, откуда, очевидно, $L_1 = \frac{d}{dx} \cdot L_{2n-2} \cdot \frac{d}{dx}$.

Для самосопряженного оператора второго порядка $Lu = \frac{1}{\alpha_1}\frac{d}{dx}\frac{1}{\alpha_2}\frac{d}{dx}\frac{u}{\alpha_1}$ можно найти параметрическое представление его коэффициентов и фундаментальной системы решений, зависящее от 2 произвольных функций одного переменного и свободное от квадратур: воспользуемся такой же заменой переменной, что и в случае антисамосопряженных операторов 3-го порядка (стр. 62), получив $u_1 = \alpha_1(x)$, $u_2 = \alpha_1(x)\beta(x)$, $\alpha_2 = \beta'$, где $\alpha_1(x)$, $\beta(x)$ — две произвольные функции одного переменного.

Задача 16. Покажите, что условие обращения в ноль коэффициента $c_1(x)$ при $\frac{d}{dx}$ в стандартном разложении оператора второго порядка $L = c_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + c_1(x)\frac{d}{dx} + c_0(x)$ для вышеприведенной параметризации самосопряженных операторов второго порядка приводит к следующему интересному параметрическому представлению стационарного одномерного оператора Шредингера вместе с его фундаментальным базисом решений:

$$\frac{d^2}{dx^2} + V(x) = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\beta'\beta''' - 3(\beta'')^2}{4(\beta')^2}, \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{\beta'}}, \quad u_2 = \frac{\beta}{\sqrt{\beta'}},$$

где $\beta(x)$ — произвольная функция, $\alpha_1 = u_1 = \frac{1}{\sqrt{\beta'}}$, $\alpha_2 = \beta'$.

Задача 17. Выведите аналогичное параметрической представление для операторов четвертого порядка.

Указание. Заменой независимой переменной приведите оператор к виду $\frac{1}{\gamma}\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{\beta}\frac{d^2}{dx^2}\frac{u}{\gamma}$, его фундаментальная система может быть задана следующим образом: $u_1 = \gamma$, $u_2 = \gamma x$, $u_3 = \gamma \int \Big(\int \beta\, dx\Big) dx$, $u_4 = \gamma \int \Big(\int x\beta\, dx\Big) dx$; вводя новую произвольную функцию вместо β: $\beta = \varphi'''$, избавьтесь от квадратур и сделайте обратную замену независимой переменной.

Для самосопряженных операторов более высокого порядка аналогичные (но намного более сложные) формулы без квадратур будут получены в § 16.

14. Упрощенный метод Дарбу интегрирования серий A_n и C_n; полнота решений, полученных методом Мутара

Как отмечает Дарбу [34, гл. 6], можно выписать выражения для инвариантов Лапласа всех уравнений конечной цепочки в простой явной форме. Именно, введем величины

$$H_0 = \beta(x, y) = x_1(x)y_1(y) + \ldots + x_M(x)y_M(y),$$

$$H_1 = \left\| \begin{matrix} \beta & \frac{\partial\beta}{\partial x} \\ \frac{\partial\beta}{\partial y} & \frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial y} \end{matrix} \right\|, \cdots, H_p = \left\| \begin{matrix} \beta & \frac{\partial\beta}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial^p\beta}{\partial x^p} \\ \frac{\partial\beta}{\partial y} & \frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial y} & \cdots & \frac{\partial^{p+1}\beta}{\partial x^p\partial y} \\ \frac{\partial^p\beta}{\partial y^p} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^{2p}\beta}{\partial x^p\partial y^p} \end{matrix} \right\|. \tag{14.1}$$

Тогда, как показано Дарбу [34, § 378], инварианты Лапласа для построенной в § 3 цепочки уравнений (E_k) равны $h_{k-i} = -\frac{\partial^2 \ln H_{i-1}}{\partial x\,\partial y}$, $h_k = 0$. Так получаются все конечные в одну сторону цепочки, если выбрать произвольную функцию $\beta(x,y)$ двух переменных.

Задача 18. Докажите эти утверждения, используя соотношение

$$H_{i-1}H_{i+1} = H_i\frac{\partial^2 H_i}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial H_i}{\partial x}\frac{\partial H_i}{\partial y} = H_i^2\,\frac{\partial^2 \ln H_i}{\partial x\,\partial y}. \tag{14.2}$$

Теперь условие конечности цепочки $k_{-m} \equiv h_{-m-1} = 0$ приобретает вид $\frac{\partial^2 \ln H_{k+m}}{\partial x\,\partial y} = 0$, или, в силу (14.2), $H_M = 0$ $(M = m + k + 1)$, что означает равенство нулю вронскиана по переменной x, составленного из функций β, $\frac{\partial\beta}{\partial y}$, $\dots$, $\frac{\partial^M\beta}{\partial y^M}$, т.е. наличие линейного соотношения между ними с коэффициентами, зависящими только от y. Тем самым мы вновь вывели уравнение (5.9), выражающее тот факт, что β представляется в виде (14.1). Тем самым (14.1) дает простую общую формулу для нахождения решения экспоненциальной системы с матрицей (A_n), $n = M - 1 = m + k$. Отметим, что количество независимых функций одного переменного в полученном решении системы (10.3) с $M-1 = m+k$ уравнениями равно $2(M-1)$: вынеся множитель $x_1(x)y_1(y)$ из β, в силу $(\ln(x_1(x)y_1(y)))_{xy} = 0$ мы можем выбрать $\beta = 1 + \widetilde{x}_2(x)\widetilde{y}_2(y) + \ldots + \widetilde{x}_M(x)\widetilde{y}_M(y)$, $\widetilde{x}_i = x_i/x_1$, $\widetilde{y}_i = y_i/y_1$.

Покажем теперь, что, начиная построение той же конечной цепочки (3.8) с противоположного конца (E_{-m}), (E_{-m+1}), $\dots$, мы можем использовать те же самые формулы, заменив в них местами $x \longleftrightarrow y$ и функции $x_s(x)$ на сопряженный им базис

$v_i(x)$, а $y_s(y)$ — на сопряженный базис $w_i(y)$ (см. § 13), т.е. выбрав вместо $\beta = \sum x_i y_i$ функцию $\alpha = \sum v_i w_i$.

Действительно, величины $K_0 = \alpha$, $K_1 = \begin{Vmatrix} \alpha & \frac{\partial\alpha}{\partial x} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial y} & \frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y} \end{Vmatrix}, \ldots,$ построенные по формулам (14.1), удовлетворяют соотношениям $\frac{\partial^2 \ln K_i}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 \ln H_{M-i-2}}{\partial x\partial y}$, что гарантирует совпадение инвариантов Лапласа цепочек, построенных по α, β.

Задача 19. Докажите это соотношение.

Метод Дарбу интегрирования серии C_n основан на замечании, что в случае конечной цепочки с симметрией типа Мутара мы можем положить, что выражения β и «сопряженное» α совпадают. Действительно, для симметрии цепочки в силу наличия рекуррентных соотношений для h_i необходимо и достаточно совпадения крайних ненулевых инвариантов Лапласа $k_{-m+1} = h_{-m} = -\frac{\partial^2 \ln\alpha}{\partial x\partial y} = h_{k-1} = -\frac{\partial^2 \ln\beta}{\partial x\partial y}$, откуда $\alpha = \beta \cdot \varphi(x) \cdot \psi(y)$. Домножением линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют $x_i(x)$ и $y_i(y)$, на $\varphi(x)$, $\psi(y)$ соответственно, легко добиться, чтобы $\alpha \equiv \beta$.

Тем самым вопрос сводится к построению таких обыкновенных дифференциальных уравнений

$$L_x(u) = \lambda_M(x)\frac{\partial^M}{\partial x^M}u + \ldots + \lambda_1(x)\frac{\partial}{\partial x}u + \lambda_0(x)u = 0,$$

$$L_y(z) = \mu_M(y)\frac{\partial^M}{\partial y^M}z + \ldots + \mu_1(y)\frac{\partial}{\partial y}z + \mu_0(y)z = 0,$$

$M = m+k+1$, что для некоторой фундаментальной системы решений $x_i(x)$ первого уравнения и некоторой фундаментальной системы решений $y_i(y)$ второго уравнения и соответствующих им сопряженных базисов $v_i(x)$, $w_i(y)$ — решений сопряженных уравнений — выполнялось соотношение

$$x_1(x)y_1(y)+\ldots+x_M(x)y_M(y)=v_1(x)w_1(y)+\ldots+v_M(x)w_M(y). \tag{14.3}$$

Лемма 14.1. ***(Дарбу)*** *Для выполнения равенства (14.3) в случае нечетного M необходимо и достаточно, чтобы операторы L_x и L_y были антисамосопряженными, а канонические квадратичные соотношения (13.10) для $x_i(x)$ совпадали (в смысле совпадения коэффициентов) с такими же соотношениями для $w_i(y)$.*

Замечание. Последнее условие удовлетворяется, если выбрать базис $x_i(x)$ произвольным, а $y_i(y)$ — подобрать, совершив подходящую линейную замену фундаментального базиса.

Доказательство. Продифференцировав соотношение (14.3) по y до порядка $M-1$ и подставив произвольное значение аргумента $y = y_0$, видим в силу невырожденности вронскиана решений $y_i(y)$ и $w_i(y)$, что пространства решений $\{x_i\}$ оператора L_x и $\{v_i\}$ оператора L_x^* совпадают. Аналогичное рассуждение для L_y доказывает первую часть утверждения леммы. Пусть теперь $\Psi(x_1, \ldots, x_M) = \sum \psi_{ij} x_i x_j$ — каноническая квадратичная форма с постоянными коэффициентами (13.10); она позволяет выразить сопряженный базис $v_i = \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial x_i}$. Пусть также $\Theta(w_1, \ldots, w_M) = \sum \theta_{ij} w_i w_j$ — аналогичная каноническая форма для w_i, $y_i = \frac{1}{2}\frac{\partial\Theta}{\partial w_i}$. Подставляя эти выражения в (14.3), имеем $x_1(x)\frac{\partial\Theta}{\partial w_1} + \ldots + x_M(x)\frac{\partial\Theta}{\partial w_M} = \sum \theta_{ij} w_i x_j = w_1(y)\frac{\partial\Psi}{\partial x_1} + \ldots + w_M(y)\frac{\partial\Psi}{\partial x_M} = \sum \psi_{ij} w_i x_j$. Отсюда получаем совпадение коэффициентов ψ_{ij}, θ_{ij}: в противном случае, подставив в полученное равенство $y = y_0$, придем к линейному соотношению между x_i. Это и доказывает вторую часть утверждения леммы.

Поскольку, как показано в § 13, мы можем индуктивно построить полное семейство антисамосопряженных операторов произвольного нечетного порядка M, параметризованное $\left[\frac{M}{2}+1\right]$ функциями одного переменного, вместе с базисом их решений (удовлетворяющим каноническим квадратичным соотношениям (13.10)), избегая квадратур, формулы (14.1) дают нам полное решение задачи о нахождении конечных цепочек Лапласа с симметрией типа Мутара.

Задача 20. Построить методом Дарбу полное решение экспоненциальных систем с матрицами (C_2), (C_3). Сколько независимых функций одного переменного оно включает? Проверьте, что системы с матрицами (C_2) и (B_2) эквивалентны. Используя редукцию $C_3 \longmapsto G_2$ (стр. 51), попытайтесь проинтегрировать систему (10.10) с матрицей Картана G_2.

Задача 21. Доказать ([34, § 389]), что для конечных цепочек Мутара длины $M+1 = 2n$ определитель H_{n-2} есть полный квадрат.

Покажем теперь ([34, § 396]), используя результаты § 13, что метод Мутара, описанный в § 12, действительно дает полное решение задачи нахождения конечных цепочек Лапласа, имеющих симметрии типа Мутара. Для этого достаточно доказать (в силу обратимости преобразования Мутара), что, подбирая подходящее $\omega(x,y)$, определяющее преобразование Мутара, можно не только перейти от цепочки длины M к цепочке длины $M+2$, но и всегда возможно перейти к цепочке длины $M-2$. Проанализируем для этого подробнее процедуру преобразования Мутара. Пусть $z = A_1(x,y)X + A_2(x,y)X' + \ldots + A_k(x,y)X^{(k)} + B_1(x,y)Y + B_2(x,y)Y' + \ldots + B_k(x,y)Y^{(k)} = L_1(X) + L_2(Y)$ — полное решение уравнения Мутара с длиной цепочки $2k$. Введем соответствующие билинейные формы $vL_1(u) - uL_1^*(v) = \frac{\partial}{\partial x}B_1(u,v)$, $vL_2(u) - uL_2^*(v) = \frac{\partial}{\partial y}B_2(u,v)$. Пусть преобразование Мутара определяется функцией $\omega(x,y) = L_1(\widetilde{X}) + L_2(\widetilde{Y})$ с некоторыми конкретными $\widetilde{X}(x)$, $\widetilde{Y}(y)$. Общее решение $\vartheta(x,y)$ преобразованного уравнения Мутара находится в виде суммы $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$, $\omega\vartheta_1 =$

$$-\int\left[\left(\omega\frac{\partial L_1(X)}{\partial x} - L_1(X)\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)dx - \left(\omega\frac{\partial L_1(X)}{\partial y} - L_1(X)\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)dy\right]$$

и аналогичного выражения для $\omega\vartheta_2$ с заменой $L_1(X)$ на $L_2(Y)$; $X(x)$, $Y(y)$ — произвольные функции одного переменного. Написанный здесь интеграл следует понимать либо как интеграл от замкнутой дифференциальной формы по любому пути γ, соединяющему начальную точку $A_0(x_0,y_0)$ с конечной точкой

$A_1(x,y)$, либо как сумму интеграла по dx от A_0 до B и интеграла по dy от B до A_1 (см. рис. 14). Интегрируя по частям, получаем

$$\omega\vartheta_1 = -\omega L_1(X)\Big|_{A_0}^{A_1} + 2B_1\Big(X, \frac{\partial\omega}{\partial x}\Big)\Big|_{A_0}^{A_1} +$$
$$+2\int_{A_0}^{A_1}\Bigg\{\underbrace{X\,L_1^*\Big(\frac{\partial\omega}{\partial x}\Big)}_{P}dx + \underbrace{\Big[\omega\frac{\partial L_1(X)}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}B_1\Big(X, \frac{\partial\omega}{\partial x}\Big)\Big]}_{Q}dy\Bigg\}. \tag{14.4}$$

На самом деле второе слагаемое Q под знаком интеграла тождественно равно 0: записывая условия совместности $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ и собирая коэффициенты при X', X'', ..., получаем, что все коэффициенты при X, X', X'', ..., в Q должны обращаться в ноль. Также видим, что $P = X\,L_1^*\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)$ зависит лишь от переменной x. Окончательно получаем:

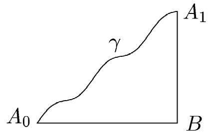

Рис. 14

$$\omega\vartheta_1 = -\omega L_1(X) + 2B_1\Big(X, \frac{\partial\omega}{\partial x}\Big) + 2\int X\,L_1^*\Big(\frac{\partial\omega}{\partial x}\Big)dx. \tag{14.5}$$

Очевидно, $L_1^*\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) = L_1^*\left(\frac{\partial}{\partial x}L_1(\widetilde{X})\right) + L_1^*\left(\frac{\partial}{\partial x}L_2(\widetilde{Y})\right)$ не зависит от y при любом $\widetilde{Y}$ (мы фиксировали $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$, но все рассуждения верны при любых $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$), если и только если $L_1^*\left(\frac{\partial}{\partial x}L_2(\widetilde{Y})\right) \equiv 0$. Аналогично $L_2^*\left(\frac{\partial}{\partial x}L_1(\widetilde{X})\right) \equiv 0$. Обозначим для краткости антисамосопряженные операторы $\Phi_1(\widetilde{X}) \equiv L_1^*\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) = L_1^*\left(\frac{\partial}{\partial x}L_2(\widetilde{X})\right)$, $\Phi_2(\widetilde{Y}) \equiv L_2^*\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right) = L_2^*\left(\frac{\partial}{\partial y}L_1(\widetilde{Y})\right)$. Коэффициенты этих операторов, как отмечалось выше, зависят лишь от соответствующих переменных x и y. Как показывает Дарбу, для того, чтобы в результате преобразования Мутара длина цепочки Лапласа уменьшилась, достаточно выбрать $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ — решения уравнений $\Phi_1(\widetilde{X}) = 0$, $\Phi_2(\widetilde{Y}) = 0$

с одним дополнительным условием. Прежде всего, поскольку $\omega = L_1(\widetilde{X})+L_2(\widetilde{Y}) = A_1(x,y)\widetilde{X}+\ldots+A_k(x,y)\widetilde{X}^{(k)}+B_1(x,y)\widetilde{Y}+\ldots+B_k(x,y)\widetilde{Y}^{(k)} =$

$$= \gamma(x,y)\begin{vmatrix} \widetilde{X} & \widetilde{X}' & \ldots & \widetilde{X}^{(k)} & \widetilde{Y} & \widetilde{Y}' & \ldots & \widetilde{Y}^{(k)} \\ x_1 & x_1' & \ldots & x_1^{(k)} & y_1 & y_1' & \ldots & y_1^{(k)} \\ x_2 & x_2' & \ldots & x_2^{(k)} & y_2 & y_2' & \ldots & y_2^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{2k+1} & x_{2k+1}' & \ldots & x_{2k+1}^{(k)} & y_{2k+1} & y_{2k+1}' & \ldots & y_{2k+1}^{(k)} \end{vmatrix}$$

в силу (5.14), то $\omega = 0$, если выбрать $\widetilde{X} = x_i$, $\widetilde{Y} = y_i$. Отсюда $\Phi_1(x_i) \equiv L_1^*\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) = 0$, $\Phi_2(y_i) \equiv L_2^*\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right) = 0$. Следовательно, ω не изменится, если мы одновременно заменим $\widetilde{X} \longmapsto \widetilde{X}-\lambda_1 x_1-\ldots-\lambda_{2k-1}x_{2k-1}$, $\widetilde{Y} \longmapsto \widetilde{Y}-\lambda_1 y_1-\ldots-\lambda_{2k-1}y_{2k-1}$, $\lambda_i = \mathrm{const}$. Т.к. y_i — линейно независимы, они образуют фундаментальный базис решений уравнений $\Phi_2(\widetilde{Y}) = 0$ и мы можем считать, что при подходящем выборе λ_i, $\widetilde{Y} = 0$. Подставив в выражение (14.5) полученное $X = \widetilde{X}$ (т.е. $\varphi = \omega$ в (8.2)), мы должны получить $\omega\vartheta = \mathrm{const}$ (очевидное свойство преобразования Мутара), т.е. $\underbrace{(L_1(\widetilde{X}))^2 - 2B_1\Big(\widetilde{X}, \dfrac{\partial}{\partial x}L_1(\widetilde{X})\Big)}_{2\Psi_1} - 2\int \widetilde{X}\,\Phi_1(\widetilde{X})dx = \mathrm{const}$ при любом $\widetilde{X}$, что означает, что $\Psi_1 = \frac{1}{2}L_1(\widetilde{X})^2 - B_1\Big(\widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial x}L_1(\widetilde{X})\Big)$ есть соответствующая оператору Φ_1 квадратичная форма-интеграл (см. § 13). Выберем теперь $\widetilde{X}$ — решение $\Phi_1(\widetilde{X}) = 0$, зануляющее этот квадратичный интеграл: $\Psi_1(\widetilde{X}) = 0$. Возможность этого выбора была обоснована в § 13. Тогда $\vartheta_1 = -\frac{1}{\omega}\Big[L_1(X)L_1(\widetilde{X}) - B_1\Big(X, \frac{\partial}{\partial x}L_1(\widetilde{X})\Big)\Big] = N(X)$ зануляется при $X = \widetilde{X}$. т.е. $N(X) = N_1\frac{\partial}{\partial x}\Big(X/\widetilde{X}\Big)$, N_1 — оператор порядка $k-1$. Введя новую произвольную функцию $X_1(x) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(X/\widetilde{X}\Big)$, получаем, что $\vartheta_1 = \alpha_1(x,y)X_1+\ldots+\alpha_{k-1}(x,y)X_1^{(k-1)}$, т.е. преобразование Мутара, построенное с выбранными таким образом $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y} = 0$, имеет длину цепочки Лапласа на единицу меньше в одну из сторон, а следовательно, в силу симметрии, и во вторую сторону, что и требовалось доказать.

15. Интегрирование серии B_n с помощью преобразований Гурса

Покажем вначале, что преобразование Гурса (9.2) переводит уравнение Гурса с конечной цепочкой (3.9) длины $2n-1$ в уравнение с цепочкой длины не более $2n+1$. Как и для уравнения Мутара, полагаем $z = L_1(X) + L_2(Y)$, $L_1(X) = A_0(x,y)X + A_1(x,y)X' + \ldots + X^{(n)}$, $L_2(Y) = B_0(x,y)Y + B_1(x,y)Y' + \ldots + B_{n-1}(x,y)Y^{(n-1)}$ — общее решение $(\mathcal{GL})$; для простоты мы вновь возьмем $Y \equiv 0$ для «преобразуемого» решения ϑ_2 — мы можем это делать в силу линейности (9.2) по $z = \sqrt{(\vartheta_2)_x}$. Коэффициент при $X^{(n)}$ в нашей формуле мы положили равным единице — если предположить, что он нетривиален, из $(\mathcal{GL})$ видим, что он обязан не зависеть от y и может быть убран заменой произвольной функции X. Для бóльшего сходства со случаем Мутара будем также обозначать $\vartheta_1 = \omega$, $\vartheta_2 = \varphi$, $z = \sqrt{\varphi_x}$. Тогда из (9.2)

$$\left(\frac{\omega\widehat{z}}{\sqrt{\omega_x}}\right)_x = \omega\left(\frac{z}{\sqrt{\omega_x}}\right)_x = \frac{\omega}{\sqrt{\omega_x}}X^{(n+1)} + \left(\frac{\omega A_{n-1}}{\sqrt{\omega_x}} - \frac{\omega\omega_{xx}}{2\omega_x\sqrt{\omega_x}}\right)X^{(n)} +$$
$$+ \ldots + \omega\left(\frac{A_0 + (A_1)_x}{\sqrt{\omega_x}} - \frac{A_1\omega_{xx}}{2\omega_x\sqrt{\omega_x}}\right)X' + \left(\frac{(A_0)_x\omega}{\sqrt{\omega_x}} - \frac{A_0\omega\omega_{xx}}{2\omega_x\sqrt{\omega_x}}\right)X =$$
$$= \omega_0 X^{(n+1)} + \omega_1 X^{(n)} + \omega_2 X^{(n-1)} + \ldots + \omega_{n+1}X,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\omega\widehat{z}}{\sqrt{\omega_x}}\right) = \pi_1 X^{(n)} + \pi_2 X^{(n-1)} + \ldots + \pi_{n+1}X.$$

Дальнейшее полностью повторяет ход рассуждений в § 12: перекрестно дифференцируем две полученные выше формулы, приходя к такой же системе (12.1) на ω_i, π_k, вводим величины Ω_s и $\tau = \omega_0 X^{(n)} + \Omega_1 X^{(n-1)} + \ldots + \Omega_n X$; из полученных соотношений следует $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\omega\widehat{z}}{\sqrt{\omega_x}} - \tau\right) = \Omega_{n+1}X$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\omega\widehat{z}}{\sqrt{\omega_x}} - \tau\right) = 0$,

$\frac{\omega\widehat{z}}{\sqrt{\omega_x}} - \tau = \int_{x_0}^{x} \Omega_{n+1} X\,dx$, вводя новую произвольную функцию $\widehat{X}(x) = \frac{1}{\Omega_{n+1}} \int_{x_0}^{x} \Omega_{n+1} X\,dx$, получаем требуемое $\widehat{z} = \widehat{X}^{(n+1)} + F_1 \widehat{X}^{(n)} + \ldots + F_{n+1}\widehat{X}$.

Из леммы 4.1 теперь вытекает конечность цепочки Лапласа преобразованного уравнения Гурса в одну сторону; из симметрии цепочки автоматически следует ее конечность в другую сторону.

Тот факт, что удлиннение действительно происходит в случае общего положения, вытекает из следующей задачи.

Задача 22. Покажите, что уравнение $(\mathcal{GL})$ с $\lambda = \frac{n^2}{(x+y)^2}$ имеет конечную цепочку инвариантов Лапласа длины $2n-1$. Частное решение $\vartheta = \frac{(x+y)^{2n+1}}{2n+1}$ переводит его в уравнение Гурса с $\lambda = \frac{(n+1)^2}{(x+y)^2}$.

Для доказательства полноты семейства получаемых решений вновь необходимо так подобрать преобразующую функцию ω, чтобы фактическая длина цепочки уменьшилась на 1 в каждую сторону. Как и на стр. 69–71, вычисляем

$$\frac{\omega\widehat{z}_1}{\sqrt{\omega_x}} = \int \left\{ \omega \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{L_1(X)}{\sqrt{\omega_x}}\right) dx - \frac{\omega^3 \left(\frac{1}{\omega}\right)_{xy}}{\omega_{xy}} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{L_1(X)}{\sqrt{\omega_x}}\right) dy \right\} =$$

$$= \int \left\{ \omega \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{L_1(X)}{\sqrt{\omega_x}}\right) dx + \left(\omega - \frac{\sqrt{\omega_x\omega_y}}{\sqrt{\lambda}}\right) \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{L_1(X)}{\sqrt{\omega_x}}\right) dy \right\} =$$

$$= \omega \frac{L_1(X)}{\sqrt{\omega_x}}\Big|_{A_0}^{A_1} - B_1(X, \sqrt{\omega_x})\Big|_{A_0}^{A_1} - \int \Bigg\{ [X L_1^*(\sqrt{\omega_x})]\,dx -$$

$$- \left[\frac{\omega_y}{\sqrt{\omega_x}} L_1(X) - \frac{\partial}{\partial y} B_1(X, \sqrt{\omega_x}) + \frac{\sqrt{\omega_x\omega_y}}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{L_1(X)}{\sqrt{\omega_x}}\right)\right] dy \Bigg\}.$$

Вновь по тем же соображениям второе слагаемое под знаком интеграла тождественно обращается в 0, а первое не зависит от y;

$$\frac{\omega\widehat{z}_1}{\sqrt{\omega_x}} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega_x}}L_1(X) - B_1(X, L_1(\widetilde{X})) - \int X \underbrace{\left[L_1^*(L_1(\widetilde{X}))\right]}_{\Phi_1(\widetilde{X})} dx,$$

если мы вновь выберем $\widetilde{Y} = 0$ в определении $\sqrt{\omega_x} = L_1(\widetilde{X}) + L_2(\widetilde{Y})$. Из определения (9.2) преобразования Гурса, как и в случае преобразования Мутара, вытекает, что $\frac{\omega\widehat{z}_1}{\sqrt{\omega_x}} = \mathrm{const}$, если мы выберем $X = \widetilde{X}$, $Y = \widetilde{Y} = 0$; если вдобавок мы предположим, что $\Phi_1(\widetilde{X}) = 0$, то

$$\frac{\omega\widehat{z}_1}{\sqrt{\omega_x}} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega_x}}L_1(\widetilde{X}) - B_1(\widetilde{X}, L_1(\widetilde{X})) = \omega - B_1(\widetilde{X}, L_1(\widetilde{X})) = \mathrm{const}.$$

Но при задании $\sqrt{\omega_x} = L_1(\widetilde{X})$ необходима еще одна квадратура для нахождения само́й ω (см. (9.3)), причем константа интегрирования аддитивна. Мы можем ее выбрать таким образом, чтобы $\omega - B_1(\widetilde{X}, L_1(\widetilde{X})) = 0$. Это будет означать, что линейный дифференциальный оператор порядка n от X, $N(X) = \frac{\omega}{\sqrt{\omega_x}}L_1(X) - B_1(L_1(\widetilde{X}), X)$ зануляется при выборе $X = \widetilde{X}$, поэтому после изменения X на $X_1(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(X/\widetilde{X}\right)$, получаем, что $\widehat{z} = \alpha_1(x,y)X_1 + \ldots + \alpha_{n-1}(x,y)X_1^{(n-1)}$, т.е. преобразованное линейное уравнение Гурса имеет длину цепочки Лапласа по крайней мере на единицу меньше в одну из сторон (на самом деле из уже доказанного и обратимости преобразования Гурса вытекает, что уменьшение не может быть больше, чем на 1) — и, в силу симметрии цепочки Лапласа уравнения Гурса, во вторую сторону, что и требовалось доказать.

Отметим, что справедлив также следующий аналог леммы 14.1:

Лемма 15.1. *Для выполнения равенства (14.3), гарантирующего требуемую симметрию цепочки Лапласа, в случае четного $M = 2n$ необходимо и достаточно, чтобы операторы L_x и L_y были самосопряженными; фундаментальные базисы $x_i(x)$*

и $y_i(y)$ при этом могут всегда быть подобраны неким согласованным образом.

Доказательство. Как и в случае нечетного M, доказываем, что L_x и L_y — самосопряженные. Чтобы согласовать базисы $x_i(x)$ и $y_i(y)$ и добиться выполнения (14.3), представим L_x и L_y в виде (13.14) и выберем соответствующие этим факторизациям базисы (задача 15, стр. 60). Тогда $v_{2n} = x_1$, $v_{2n-1} = -x_2$, $\ldots$, $v_2 = x_{2n-1}$, $v_1 = -x_{2n}$, аналогично для w_i и y_k. Отсюда легко получим $\sum x_i y_i = \sum v_i w_i$.

Используя теперь представление фундаментальных базисов самосопряженных операторов (конец § 13) и общую формулу Дарбу (14.1), мы можем получить явное решение для серии B_n, не используя преобразования Гурса. Однако оно включает (вложенные) квадратуры, начиная с системы (B_3), соответствующей $M = 6$, т.е. самосопряженным операторам 6-го порядка. Тот факт, что решения систем с матрицами (B_1), (B_2) (соответствующих операторам порядка 2 и 4) не включают квадратур, объяснить просто [2]: соответствующие алгебры Ли изоморфны: $B_1 \sim C_1 \sim A_1$, $B_2 \sim C_2$.

Подведем промежуточный итог нашего рассмотрения серии B_n экспоненциальных систем: в теоретической части оно оказалось фактически немногим сложнее, чем в случае Мутара (§§ 12, 14). Однако здесь имеется существенная трудность в алгоритмической части: если мы будем пользоваться формулами (9.2), (9.3) Гурса, описанным выше способом мы получаем лишь явные выражения (без дополнительной квадратуры) для $\widehat{z} = \sqrt{\widehat{\vartheta}_x}$ — общего решения преобразованного *линейного* уравнения Гурса ($\mathcal{GL}$), в то время как для нахождения $\widehat{\lambda} = \lambda_1 - (\ln \widehat{\vartheta})_{xy}$ и выполнения преобразования Гурса на следующем шагу необходимо знать соответствующее решение $\widehat{\vartheta}$ *нелинейного* уравнения ($\mathcal{GN}$), что требует квадратуры (см. (9.3)). Можно было бы использовать явные выражения (9.4), (9.7) без квадратур, если бы мы знали соответствующие решения $\widehat{\vartheta}_i$ на *предыдущем* шаге, *согласованные* с полученным $\widehat{z}$ формулами (9.2). Более того, используя теорему 9.3 (о коммутативности кубической диаграммы рис. 4), можно напрямую находить требуемое решение $(\mathcal{GN})$ на k-м шагу, избегая вычисления $\widehat{z}$, если нам известны (согласованные с искомым χ диаграммой рис. 4) решения на предыдущих двух шагах. Однако как раз на первых двух шагах (начиная с тривиального потенциала $\lambda = 0$ в $(\mathcal{GN})$ или $\lambda = \frac{X'Y'}{(X+Y)^2}$) это согласование без квадратур описанным выше способом сделать не удается. Поэтому применение теоремы 9.3 позволяет лишь алгебраически выражать все решения экспоненциальной системы B_n через решения уравнения Гурса $(\mathcal{GN})$ (с конечной цепочкой Лапласа его линейного аналога $(\mathcal{GL})$), получаемые рекуррентно формулой из теоремы 9.3. Уровень вложенности квадратур при этом не возрастает. В следующем параграфе мы показываем, как, используя упрощенные формулы Драша (9.9)–(9.11) и некоторые общие результаты Г. Монжа и Э. Гурса, получить в принципе бесквадратурное общее решение систем серии (B_n).

16. Алгоритм Гурса решения проблемы Монжа и его применение к интегрированию серии B_n

Стартуя с тривиального уравнения Гурса $(\mathcal{GN})$ $\vartheta_{xy} = 0$ и последовательно применив несколько преобразований Гурса, можно получить любую конечную цепочку (3.9) с симметрией типа Гурса. Доказательство изложено в предыдущем параграфе.

Здесь мы даем два метода получения бесквадратурных формул для конечных цепочек инвариантов Лапласа с симметрией типа Гурса $h_i = h_{-i}$. Первый основан на последовательном применении преобразования Гурса в форме Драша (9.8)–(9.10) к тривиальному уравнению Гурса $(\mathcal{GN})$ с $\lambda = \lambda_0 \equiv 0$: $\vartheta_{xy} = 0$. Его общее решение есть $\vartheta = \varphi(x) + \psi(y)$, где $\varphi(x)$, $\psi(y)$ — произвольные функции. Пусть $\vartheta_1 = \varphi_1(x) + \psi_1(y)$ — некоторое частное решение. Применив преобразование Гурса с преобразующей функцией ϑ_1, получим новое уравнение Гурса

$$\widehat{\vartheta}_{xy} = 2\sqrt{\lambda_1 \widehat{\vartheta}_x \widehat{\vartheta}_y}, \qquad \sqrt{\lambda_1} = \frac{\sqrt{\varphi_1' \psi_1'}}{\varphi_1 + \psi_1}. \tag{16.1}$$

Его общее решение $\widehat{\vartheta}$ находится по формуле

$$\widehat{\vartheta} = \varphi + \psi - \frac{\sigma^2}{\varphi_1 + \psi_1}, \tag{16.2}$$

где σ — решение системы

$$\begin{cases} \sigma_x &= \sqrt{(\varphi_1)_x \varphi_x}, \\ \sigma_y &= \sqrt{(\psi_1)_y \psi_y}. \end{cases} \tag{16.3}$$

Уравнению (16.1) соответствует цепочка Лапласа длины 1 с единственным ненулевым инвариантом $h = \lambda_1 = \frac{\varphi_1' \psi_1'}{(\varphi_1 + \psi_1)^2}$ — решением уравнения Лиувилля $(\ln \lambda_1)_{xy} = 2\lambda_1$. Чтобы еще раз применить преобразование Гурса к (16.1) и получить бесквадратурные формулы для цепочки Лапласа длины 3 с симметрией типа Гурса, мы должны избавиться от квадратур в формуле (16.2) с $\sigma = \int \sqrt{(\varphi_1)_x \varphi_x} dx + \int \sqrt{(\psi_1)_y \psi_y} dy = \sigma_1(x) + \sigma_2(y)$. Функция $\sigma_1(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\left((\sigma_1)_x\right)^2 = (\varphi_1)_x \varphi_x, \tag{16.4}$$

или эквивалентному уравнению

$$\left(\frac{d\sigma_1}{d\varphi}\right)^2 = \frac{d\varphi_1}{d\varphi}. \tag{16.5}$$

По теореме Монжа [57], для одного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка на две неизвестные функции $F(\varphi, \varphi_1(\varphi), \sigma_1(\varphi), \varphi_1'(\varphi), \sigma_1'(\varphi)) = 0$ всегда существует параметрическое представление его полного решения вида

$$\begin{cases} \varphi &= \Phi\big(\alpha, f(\alpha), f'(\alpha), f''(\alpha)\big), \\ \varphi_1 &= \Psi\big(\alpha, f(\alpha), f'(\alpha), f''(\alpha)\big), \\ \sigma_1 &= \Sigma\big(\alpha, f(\alpha), f'(\alpha), f''(\alpha)\big), \end{cases} \tag{16.6}$$

с $f(\alpha)$ — произвольной параметрической функцией нового независимого аргумента α. Можно легко найти одно из возможных параметрических представлений для данного простого однородного уравнения (16.5), предполагая, что Φ, Ψ, Σ линейны по f, f', f'':

$$\begin{cases} \Phi &= f'', \\ \Psi &= 2f - 2\alpha f' + \alpha^2 f'', \\ \Sigma &= -f' + \alpha f''. \end{cases} \tag{16.7}$$

Функции (16.7), как легко проверить, дают решение (16.4). Сделаем в (16.7) замену, введя новую независимую переменную $x = x(\alpha)$, тогда $\alpha = \alpha(x)$ — новая произвольная параметризующая функция. В силу однородности полученные формулы по-прежнему будут давать решения (16.4) (здесь штрихи обозначают уже производные по x):

$$\begin{cases} \Phi &= \dfrac{f''}{(\alpha')^2} - \dfrac{f'\alpha''}{(\alpha')^3}, \\ \Psi &= 2f - f'\left(\dfrac{2\alpha}{\alpha'} + \dfrac{\alpha^2\alpha''}{(\alpha')^3}\right) + \dfrac{f''\alpha^2}{(\alpha')^2}, \\ \Sigma &= -f'\left(\dfrac{1}{\alpha'} + \dfrac{\alpha\alpha''}{(\alpha')^3}\right) + \dfrac{f''\alpha}{(\alpha')^2}. \end{cases} \tag{16.8}$$

Легко показать, что (16.8) дает общее решение (16.4). Действительно, считая, что $\varphi(x) = \Phi$, $\varphi_1(x) = \Psi$, $\sigma_1(x) = \Sigma$ заданы и $\varphi(x)$ — монотонная функция, из первого и третьего уравнения системы (16.8) находим $f' = \alpha'(\alpha\varphi - \sigma_1)$, $\alpha = \sigma_1'/\varphi'$. Подставляя их во второе уравнение, находим $f = \frac{1}{2}\left(\varphi_1 + \varphi\left(\frac{\sigma_1'}{\varphi'}\right)^2 - 2\sigma_1\frac{\sigma_1'}{\varphi'}\right)$. Таким образом мы получаем выражение для полного решения (16.1), зависящее от 4 произвольных параметрических функций одного переменного $f(x)$, $\alpha(x)$, $g(y)$, $\rho(y)$ и их производных и не содержащее квадратур:

$$\widehat{\vartheta} = \Phi(x, \alpha(x), f(x), \alpha', \alpha'', f', f'') + \Phi(y, \rho(y), g(y), \rho', \rho'', g', g'') -$$

$$-\frac{(\Sigma(x,\alpha(x),f(x),\alpha',\alpha'',f',f'')+\Sigma(y,\rho(y),g(y),\rho',\rho'',g',g''))^2}{\Psi(x,\alpha(x),f(x),\alpha',\alpha'',f',f'')+\Psi(y,\rho(y),g(y),\rho',\rho'',g',g'')}, \tag{16.9}$$

где выражения Φ, Ψ, Σ задаются формулами (16.8).

Это выражение дает нам также решение экспоненциальной системы с матрицей B_2: $h_0 = \lambda_{12} = \lambda_1 - (\ln\widehat{\vartheta})_{xy}$, $h_1 = h_{-1} = \lambda_{12} - \frac{1}{2}(\ln\lambda_{12})_{xy}$, $h_2 = h_{-2} = 0$. Наличие бесквадратурной формулы для данного случая, однако, очевидно в силу известного изоморфизма алгебр Ли $B_2 \simeq C_2$.

По другой интерпретации (16.9) дает бесквадратурное выражение для $\widehat{\vartheta}$ и λ_{12} в ромбической диаграмме рис. 13 (стр. 42) с $\lambda_0 \equiv 0$. Для того чтобы получить решение экспоненциальной системы с матрицей B_3, проделаем соответствующие выкладки для кубической диаграммы рис. 14 с $\lambda_0 \equiv 0$. Считая заданными $\vartheta_1 = \varphi_1(x)+\psi_1(y)$, $\vartheta_2 = \varphi_2(x)+\psi_2(y)$, $\vartheta_3 = \varphi_3(x)+\psi_3(y)$, мы должны найти $\sigma = \sigma_1(x)+\sigma_2(y)$, $\overline{\sigma} = \overline{\sigma}_1(x)+\overline{\sigma}_2(y)$, $\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\sigma}}_1(x)+\overline{\overline{\sigma}}_2(y)$ из (9.11). Как очевидно, первые уравнения трех систем (9.11) дают нам недоопределенную систему из 3 нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений на 6 функций σ_1, $\overline{\sigma}_1$, $\overline{\overline{\sigma}}_1$, φ_1, φ_2, φ_3:

$$(\sigma_1)_x = \sqrt{(\varphi_1)_x(\varphi_2)_x},\ (\overline{\sigma}_1)_x = \sqrt{(\varphi_1)_x(\varphi_3)_x},\ (\overline{\overline{\sigma}}_1)_x = \sqrt{(\varphi_2)_x(\varphi_3)_x} \tag{16.10}$$

Нам необходимо найти ее общее решение в виде дифференциального (не содержащего квадратур) выражения через 3 новые параметризующие функции, аналогично выражениям (16.8) выше. Данная задача является частным случаем общей проблемы Монжа ([72], более подробно мы обсуждаем проблему Монжа в § 19). Рассматриваемая нами система включает лишь производные первого порядка неизвестных функций σ_1', $\overline{\sigma}_1'$, $\overline{\overline{\sigma}}_1'$, φ_1', φ_2', φ_3' и не содержит их самих и независимую переменную x. Для таких недоопределенных систем, как показал Гурса [47], параметрическое бесквадратурное представление полного решения всегда возможно и может быть найдено в явном виде алгоритмически. Мы продемонстрируем алгоритм Гурса на примере системы (16.10). Запишем ее в дифференциалах:

$$(d\sigma_1)^2 = d\varphi_1 d\varphi_2, \quad (d\overline{\sigma}_1)^2 = d\varphi_1 d\varphi_3, \quad (d\overline{\overline{\sigma}}_1)^2 = d\varphi_2 d\varphi_3. \quad (16.11)$$

На первом шагу алгоритма дополним систему (16.11) уравнением

$$\frac{d\overline{\sigma}_1}{d\varphi_1} = f\left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}\right), \quad (16.12)$$

где f — произвольная (параметрическая) функция, так, чтобы общее число уравнений пополненной системы было на 2 меньше общего числа переменных в (16.11). На втором шаге, рассматривая (16.11) и (16.12) как однородную алгебраическую систему 4 уравнений на 6 неизвестных, находим ее однопараметрическое решение

$$\begin{gathered} d\varphi_1 = 1, \quad d\sigma_1 = \alpha, \quad d\varphi_2 = \alpha^2, \quad d\varphi_3 = f^2(\alpha^2) \equiv \overline{f}^2(\alpha), \\ d\overline{\sigma}_1 = f(\alpha^2) \equiv \overline{f}(\alpha), \quad d\overline{\overline{\sigma}}_1 = \alpha f(\alpha^2) \equiv \alpha\overline{f}(\alpha). \end{gathered} \quad (16.13)$$

Третий шаг: сформируем выражение

$$\begin{gathered} U(\alpha) = d\varphi_1 - p_1 d\varphi_2 - p_2 d\varphi_3 - p_3 d\sigma_1 - p_4 d\overline{\sigma}_1 - p_5 d\overline{\overline{\sigma}_1} = \\ = 1 - p_1\alpha^2 - p_2\overline{f}^2(\alpha) - p_3\alpha - p_4\overline{f}(\alpha) - p_5\alpha\overline{f}(\alpha). \end{gathered}$$

Продифференцируем $U(\alpha)$ по α, считая p_i, $i = 1, \ldots, 5$ независимыми переменными, и рассмотрим систему

$$U(\alpha) = 0, \frac{dU(\alpha)}{d\alpha} = 0, \ldots, \frac{d^4U(\alpha)}{d\alpha^4} = 0 \quad (16.14)$$

как систему линейных алгебраических уравнений на p_i. Найдем ее решение $p_i(\alpha)$.

Четвертый шаг: сформируем выражение

$$V(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \sigma_1, \overline{\sigma}_1, \overline{\overline{\sigma}}_1, \alpha) = \varphi_1 - p_1(\alpha)\cdot\varphi_2 - \ldots - p_5(\alpha)\cdot\overline{\overline{\sigma}}_1 - \widehat{f}(\alpha), \quad (16.15)$$

где $p_i(\alpha)$ — найденные решения (16.14), а $\widehat{f}(\alpha)$ — вторая произвольная параметрическая функция. Продифференцируем (16.15) по α, считая φ_1, φ_2, φ_3, σ_1, $\overline{\sigma}_1$, $\overline{\overline{\sigma}}_1$ независимыми переменными, и рассмотрим систему

$$V(\alpha) = 0, \frac{dV(\alpha)}{d\alpha} = 0, \ldots, \frac{d^5V(\alpha)}{d\alpha^5} = 0$$

как систему линейных алгебраических уравнений на φ_1, φ_2, φ_3, σ_1, $\overline{\sigma}_1$, $\overline{\overline{\sigma}}_1$. Отсюда получим выражения для них через α, параметризующие функции $\widehat{f}(\alpha)$, $\widehat{f}(\alpha)$ и их производные до девятого порядка включительно.

Вновь, как и в (16.7), сделаем замену, возвращаясь к старой независимой переменной $x = x(\alpha)$, тогда $\alpha = \alpha(x) \equiv f_3(x)$ — новая произвольная параметризующая функция. Получим общее решение (16.10), зависящее от трех параметризующих функций $f_1(x) = \overline{f}(\alpha(x))$, $f_2(x) = \widehat{f}(\alpha(x))$ и $f_3(x)$.

Разумеется, полученные выражения достаточно сложны, но, как показано Гурса [47], дают общее параметрическое выражение для решения недоопределенной системы (16.10). Выписывая идентичные параметрические выражения для σ_2, $\overline{\sigma}_2$, $\overline{\overline{\sigma}}_2$, ψ_1, ψ_2, ψ_3 через новые параметрические функции $g_1(y)$, $g_2(y)$, $g_3(y)$, по теореме 9.4 получаем алгебраические выражения для χ и $\lambda_{123} = \lambda_{12} - (\ln \chi)_{xy}$. Тем самым получены выражения для цепочек инвариантов Лапласа длины 5 с симметрией Гурса: $h_0 = \lambda_{123}$, $h_1 = h_{-1} = h_0 - \frac{1}{2}(\ln h_0)_{xy}$, $h_2 = h_{-2} = h_0 - \ln h_0 h_1$, $h_3 = h_{-3} = 0$, то есть для решения экспоненциальной системы с матрицей B_3.

Для решения систем с матрицами (B_n), $n > 3$ необходимо рассмотреть гиперкубическую диаграмму, аналогичную рис. 13. Формулы (9.12) дадут нам алгебраические выражения для нелинейной суперпозиции решений $\vartheta_i = \varphi_i(x) + \psi_i(y)$ исходного тривиального уравнения Гурса с $\lambda_0 = 0$ при условии, что будут найдены все соответствующие функции второй ступени σ_{ij}, удовлетворяющие системе, аналогичной (9.11). Параметрическое представление для φ_i, ψ_i, σ_{ij} вновь получаем алгоритмом Гурса.

Отметим, что получаемые описанным способом формулы чрезвычайно сложны. Ниже мы выводим упрощенные формулы решений систем B_n, основанные на методе Дарбу (§ 14), этот метод автоматически обеспечивает полноту найденного семейства бесквадратурных решений.

Как и в случае систем с матрицей (C_n), будем использовать аналог леммы 14.1 — лемму 15.1 для построения по формулам (14.1) цепочки длины $n = M - 1 = 2k - 1$ с симметрией Гурса. Вопрос вновь сводится к построению таких фундаментальных систем решений $\varphi_i(x)$, $\psi_i(y)$ двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, что для $\varphi_i(x)$, $\psi_i(y)$ и соответствующих им сопряженных базисов $v_i(x)$, $w_i(y)$ — решений сопряженных уравнений — выполнялось бы соотношение

$$\varphi_1(x)\psi_1(y)+\ldots+\varphi_M(x)\psi_M(y)=v_1(x)w_1(y)+\ldots+v_M(x)w_M(y). \tag{16.16}$$

Нашей задачей теперь будет нахождение бесквадратурного параметрического представления коэффициентов $\alpha_i(x)$ и фундаментальных базисов решений самосопряженных линейных операторов порядка $M = 2k$ в факторизованном виде (13.14). Выполнение квадратичного соотношения (16.16) при этом также будет гарантировано. Представим факторизованный самосопряженный оператор L в виде $L = (A^*) \circ A$ с произвольным оператором A порядка k. Пусть $z_1, \ldots, z_k$ — фундаментальный базис решений уравнения $A^* z = 0$, тогда фундаментальный базис $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2k}$ решений $L\varphi = (A^*) \circ A\varphi = 0$ найдем из уравнений $A\varphi_1 = A\varphi_2 = \ldots = A\varphi_k = 0$, $A\varphi_{k+1} = z_1, \ldots,$ $A\varphi_{2k} = z_k$. Формула (13.2) дает нам выражение $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ через z_i и коэффициент $\lambda_k(x)$ при старшей производной оператора A^*, который можно считать произвольной параметризующей функцией. При этом, как отмечено выше, сопряженным базисом к $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ является базис $(-z_i)$. Используя (13.4) и (13.5), методом вариации постоянных находим оставшиеся

$$\varphi_{k+i} = -\sum_{j=1}^{k} \varphi_j \int z_j z_i dx. \tag{16.17}$$

Чтобы избавиться от квадратуры в (16.17), необходимо найти параметрическое выражение функций $z_i(x)$ и $w_{ij}(x)$, таких, что $w'_{ij} = z_j z_i$, через новые параметризующие функции $f_1(x)$, $\dots$, $f_k(x)$ и их производные. Замечая, что $z_i = \sqrt{w'_{ii}}$, получаем эквивалентную недоопределенную систему уравнений типа Монжа-Гурса

$$w'_{ij} = \sqrt{w'_{ii} w'_{jj}}, \qquad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, k.$$

Как мы показали выше, данная система всегда допускает представление решений с помощью алгоритма Гурса через параметрические функции $f_i(x)$, $i = 1, \dots, k$ и их производные.

Тем самым мы построили параметрическое представление фундаментального базиса $\varphi_1, \dots, \varphi_{2k}$ решений $L\varphi = A^* A\varphi = 0$ через $k+1$ произвольную функцию $\lambda_k(x)$ и $f_i(x)$ без использования квадратур. Найдем теперь сопряженный базис $v_1, \dots,$ v_{2k} с помощью формул (13.2). Как мы покажем ниже,

$$v_i = -\varphi_{k+i}, \quad v_{k+i} = \varphi_i, \quad i \leq k. \tag{16.18}$$

Тем самым, если мы построим тем же способом параметризованный базис $\psi_i(y)$ и ему сопряженный $w_i(y)$ для самосопряженного оператора $L_{(y)}$, квадратичное соотношение (16.16) будет выполнено в силу (16.18).

Чтобы доказать (16.18), отметим прежде всего некоторые свойства построенного нами базиса (16.17).

Лемма 16.1.. *Пусть $B_L(u, v) = \int vLu\,dx - \int uL^* v\,dx$. Тогда для построенного нами базиса $\varphi_1, \dots, \varphi_{2k}$ решений самосопряженного уравнения $L\varphi = A^* A\varphi = 0$ выполняются соотношения $B_L(\varphi_i, \varphi_j) = 0$, $B_L(\varphi_{k+i}, \varphi_j) = \delta_{ij}$, $B_L(\varphi_{k+i}, \varphi_{k+j}) = 0$ для всех $i \leq k$, $j \leq k$.*

Доказательство. Поскольку в нашем случае $L = A^* A$, $B_L(u, v) = B_{A^*}(Au, v) + B_A(u, Av)$. Отсюда в силу определения базиса φ_i $B_L(\varphi_i, \varphi_j) = B_{A^*}(A\varphi_i, \varphi_j) + B_A(\varphi_i, A\varphi_j) = 0$, если $i, j \leq k$. $B_L(\varphi_{k+i}, \varphi_j) = B_{A^*}(A\varphi_{k+i}, \varphi_j) + B_A(\varphi_{k+i}, A\varphi_j) = B_{A^*}(z_i, \varphi_j) = \delta_{ji}$ в силу (13.3);

$$B_L(\varphi_{k+i}, \varphi_{k+j}) = B_{A^*}(A\varphi_{k+i}, \varphi_{k+j}) + B_A(\varphi_{k+i}, A\varphi_{k+j}) = \\ = B_{A^*}(z_i, \varphi_{k+j}) + B_A(\varphi_{k+i}, z_j). \quad (16.19)$$

Чтобы вычислить последнее выражение, заметим, что по построению $\varphi_{k+j} = -\sum_i \varphi_i w_{ij}$, $w'_{ij} = z_i z_j$. Дифференцируя это равенство до порядка $(k-1)$ включительно и учитывая (13.4), имеем $\varphi'_{k+j} = -\sum \varphi'_i w_{ij}$, $\varphi''_{k+j} = -\sum \varphi''_i w_{ij}$, $\ldots$, $\varphi^{(k-1)}_{k+j} = -\sum \varphi^{(k-1)}_i w_{ij}$, откуда $B_{A^*}(z_i, \varphi_{k+j}) = -B_{A^*}(z_i, \sum_s \varphi_s w_{sj}) = -\sum_{s=1}^k B_{A^*}(z_i, \varphi_s) w_{sj} = -\sum_s \delta_{si} w_{sj} = -w_{ij}$. Аналогично $B_A(\varphi_{k+i}, z_j) = -B_A(\sum_s \varphi_s w_{si}, z_j) = -\sum_{s=1}^k B_A(\varphi_s, z_j) w_{si} = \sum_{s=1}^k B_{A^*}(z_j, \varphi_s) w_{si} = \sum_s \delta_{js} w_{si} = w_{ij}$. Подставляя эти выражения в (16.19), окончательно получаем $B_L(\varphi_{k+i}, \varphi_{k+j}) = -w_{ij} + w_{ij} = 0$. Лемма доказана.

Следствие 16.2.. *Пусть φ_1, $\ldots$, φ_{2k} — построенный нами базис решений самосопряженного уравнения $L\varphi = A^*A\varphi = 0$. Тогда его сопряженный базис задается формулами (16.18).*

Доказательство. Для задаваемых (16.18) функций v_i, v_{k+j} имеем $B_L(\varphi_i, v_j) = -B_L(\varphi_i, \varphi_{k+j}) = B_L(\varphi_{k+j}, \varphi_i) = \delta_{ij}$, $B_L(\varphi_{k+i}, v_{k+j}) = B_L(\varphi_{k+i}, \varphi_j) = \delta_{ij}$, $B_L(\varphi_i, v_{k+j}) = B_L(\varphi_i, \varphi_j) = 0$, $B_L(\varphi_{k+i}, v_j) = -B_L(\varphi_{k+i}, \varphi_{k+j}) = 0$, $i, j \leq k$. Поскольку оператор L самосопряжен, пространство, порождаемое φ_I, совпадает с порождаемым v_J, $I, J \leq 2k$, а свойство $B_L(\varphi_I, v_J) = \delta_{IJ}$ характеризует сопряженный базис однозначно, получаем требуемое утверждение.

Подводя итог нашему рассмотрению нелинейных экспоненциальных систем серии (B_n), отметим, что даже упрощенные формулы для решений простейшей нетривиальной системы (B_3) слишком сложны. Тем самым актуальной является задача получения «максимально простых» бесквадратурных формул или доказательства каких-либо оценок снизу на алгебраическую сложность возможных формул для решений систем (B_n).

17. Преобразования Лапласа для гиперболических уравнений и систем второго порядка в нехарактеристических переменных

В данном параграфе мы вернемся к рассмотрению линейных дифференциальных уравнений второго порядка вида (2.1). В § 2 мы описали процедуру приведения гиперболического уравнения (2.1) к каноническому виду (2.11), что служило нам отправным пунктом в последующем изучении. Однако, как очевидно из рассмотрения проблемы приведения к каноническому виду в § 2, приведение к (2.11) требует решения обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения общего вида (2.7), что далеко не всегда выполнимо в явном виде. Ниже мы излагаем более общую версию теории преобразований Лапласа, обобщающую теорию параграфа 3. Она была известна уже давно [43, с. 30] и может быть непосредственно применена к строго гиперболическим уравнениям вида (2.1), которые мы будем записывать в операторном виде $\hat{L}u = 0$ с оператором

$$\hat{L} = \sum_{i=0}^{2} p_i(x,y)\hat{D}_x^i\hat{D}_y^{2-i} + D(x,y)\hat{D}_x + E(x,y)\hat{D}_y + F(x,y), \quad (17.1)$$

$p_2 \equiv A(x,y)$, $p_1 \equiv B(x,y)$, $p_0 \equiv C(x,y)$. Здесь и далее для удобства мы будем использовать знак $\hat{}$ для обозначения дифференциальных операторов, причем $\hat{D}_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\hat{D}_y = \frac{\partial}{\partial y}$. Кроме того, мы покажем, как интегрировать с помощью преобразований Лапласа строго гиперболические системы вида

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_y + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad (17.2)$$

$a_{ij} = a_{ij}(x,y)$, $b_{ij} = b_{ij}(x,y)$. Строгая гиперболичность для операторов (17.1) по определению означает, что *характеристическое уравнение* $p_0(x,y) + \lambda p_1(x,y) + \lambda^2 p_2(x,y) = 0$, составленное по старшим коэффициентам оператора, имеет два различных вещественных корня λ_1, λ_2 в любой точке (x, y) рассматриваемой области независимых переменных. Для системы (17.2) строгая гиперболичность означает, что собственные значения $\lambda_k(x, y)$ матрицы (a_{ij}) вещественны и различны.

Любое строго гиперболическое уравнение $\hat{L}u = 0$ с оператором (17.1) можно записать в *характеристической форме*

$$\begin{array}{l}(\hat{X}_1\hat{X}_2 + \alpha_1\hat{X}_1 + \alpha_2\hat{X}_2 + \alpha_3)u = \\ (\hat{X}_2\hat{X}_1 + \overline{\alpha}_1\hat{X}_1 + \overline{\alpha}_2\hat{X}_2 + \alpha_3)u = 0,\end{array} \tag{17.3}$$

где $\alpha_i = \alpha_i(x, y)$, а коэффициенты характеристических операторов $\hat{X}_i = m_i(x, y)\hat{D}_x + n_i(x, y)\hat{D}_y$ находятся (с точностью до растяжения $\hat{X}_i \to \gamma_i(x, y)\hat{X}_i$) из характеристического уравнения $m_i^2 p_0 - m_i n_i p_1 + n_i^2 p_2 = 0$ для главного символа оператора (17.1). Поскольку операторы $\hat{X}_i$ не коммутируют, необходимо принимать во внимание в (17.3) и везде в нижеследующих формулах *соотношение коммутации*

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = \hat{X}_1\hat{X}_2 - \hat{X}_2\hat{X}_1 = P(x, y)\hat{X}_1 + Q(x, y)\hat{X}_2. \tag{17.4}$$

Используя величины (которые являются инвариантами Лапласа оператора (17.3))

$$h = \hat{X}_1(\alpha_1) + \alpha_1\alpha_2 - \alpha_3, \quad k = \hat{X}_2(\overline{\alpha}_2) + \overline{\alpha}_1\overline{\alpha}_2 - \alpha_3, \tag{17.5}$$

представим исходный оператор $\hat{L}$ в частично факторизованной форме

$$\hat{L} = (\hat{X}_1 + \alpha_2)(\hat{X}_2 + \alpha_1) - h = (\hat{X}_2 + \overline{\alpha}_1)(\hat{X}_1 + \overline{\alpha}_2) - k. \tag{17.6}$$

Из нее мы видим, что уравнение $\hat{L}u = 0$ эквивалентно каждой из систем первого порядка

$$(S_1) : \left\{ \begin{array}{l} \hat{X}_2 u = -\alpha_1 u + v, \\ \hat{X}_1 v = hu - \alpha_2 v. \end{array} \right. \Leftrightarrow (S_2) : \left\{ \begin{array}{l} \hat{X}_1 u = -\overline{\alpha}_2 u + w, \\ \hat{X}_2 w = ku - \overline{\alpha}_1 w. \end{array} \right. \tag{17.7}$$

Утверждение 17.1. *Любое строго гиперболическое уравнение второго порядка на плоскости $\hat{L}u = 0$ с оператором (17.1) эквивалентно системе двух характеристических уравнений первого порядка*

$$\begin{cases} \hat{X}_1 u_1 = \alpha_{11}(x,y)\,u_1 + \alpha_{12}(x,y)\,u_2, \\ \hat{X}_2 u_2 = \alpha_{21}(x,y)\,u_1 + \alpha_{22}(x,y)\,u_2, \end{cases} \tag{17.8}$$

с операторами $\hat{X}_i = m_i(x,y)\hat{D}_x + n_i(x,y)\hat{D}_y$, $\hat{X}_1 \neq \gamma(x,y)\hat{X}_2$. Любая такая система с недиагональной матрицей (α_{ij}) эквивалентна одному строго гиперболическому уравнению второго порядка на плоскости.

Доказательство. Преобразование строго гиперболического уравнения второго порядка на плоскости к системе (17.8) было приведено выше. Обратное преобразование также просто: если, к примеру, $\alpha_{12} \neq 0$, выразим из первого уравнения $u_2 = (\hat{X}_1 u_1 - \alpha_{11} u_1)/\alpha_{12}$ и подставим во второе уравнение системы (17.8).

Утверждение 17.2. *Если система двух уравнений первого порядка (17.2) строго гиперболическая, то она может быть преобразована в характеристическую форму* (17.8).

Доказательство. Мы будем искать такие операторы $\hat{X}_i = \hat{D}_x - \lambda_i(x,y)\hat{D}_y$ и такую линейную замену неизвестных функций $v_i(x,y)$ на новые неизвестные функции $u_i(x,y)$:

$$\begin{cases} u_1 = p_{11}(x,y)v_1(x,y) + p_{12}(x,y)v_2(x,y), \\ u_2 = p_{21}(x,y)v_1(x,y) + p_{22}(x,y)v_2(x,y), \end{cases} \tag{17.9}$$

чтобы получить систему вида (17.8). Вычислим $\hat{X}_1 u_1 = \sum_k (\hat{X}_1 p_{1k}) v_k + \sum_k p_{1k}\left((v_k)_x - \lambda_1 (v_k)_y\right) = \sum_{k,s} p_{1k}\left(a_{ks} - \lambda_1 \delta_{ks}\right)(v_s)_y + \sum_{k,s} p_{1k} b_{ks} v_s + \sum_k (\hat{X}_1 p_{1k}) v_k = \sum_{k,s} p_{1k}\left(a_{ks} - \lambda_1 \delta_{ks}\right)(v_s)_y + \sum_s v_s \Big(\sum_k p_{1k} b_{ks} + (\hat{X}_1 p_{1s})\Big)$.

Чтобы выражение $\hat{X}_1 u_1$ не содержало производных u_i, необходимо и достаточно, чтобы $\sum_k p_{1k}\left(a_{ks} - \lambda_1 \delta_{ks}\right) = 0$ для всех

s, т.е. $\lambda_1(x,y)$ должно быть собственным значением (a_{ij}) и $\vec{p}_1 = (p_{11}(x,y), p_{12}(x,y))$ — ее соответствующим левым собственным вектором. Из предположения строгой гиперболичности системы следует, что мы можем выбрать для $\hat{X}_1$, $\hat{X}_2$ соответственно два собственных различных значения матрицы и два левых собственных вектора для определения замены (17.9). Утверждение доказано.

Как видно из доказательства, характеристическая система (17.8), эквивалентная заданной системе (17.2), определена однозначно с точностью до *растяжения операторов* $\hat{X}_i \to \gamma_i(x,y)\hat{X}_i$ и *калибровочного преобразования* новых неизвестных функций $u_i \to g_i(x,y)u_i$. Легко проверить, что калибровочное преобразование не меняет инвариантов Лапласа $h = \hat{X}_2(\alpha_{11}) - \hat{X}_1(\alpha_{22}) - \hat{X}_1\hat{X}_2 \ln(\alpha_{12}) - \hat{X}_1(P) + P\alpha_{11} + \alpha_{12}\alpha_{21} + (\alpha_{22} + \hat{X}_2(\ln \alpha_{12}) + P)Q$ (здесь $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — коэффициенты коммутатора (17.4)) и $k = \alpha_{12}\alpha_{21}$; приведенные выражения для h, k представляют собой инварианты Лапласа оператора (17.3), полученного исключением u_2 из (17.8). Преобразование растяжения операторов $\hat{X}_i$ меняет инварианты мультипликативно: $h \to \gamma_1\gamma_2 h$, $k \to \gamma_1\gamma_2 k$. Очевидно, формулы (17.5) совпадают с формулами (2.22), если оператор (17.1) будет приведен к каноническому виду (2.11) со старшим членом $\hat{D}_{\bar{x}}\hat{D}_{\bar{y}}u$, т.к. тогда мы можем выбрать $\hat{X}_1 = \hat{D}_{\bar{x}}$, $\hat{X}_2 = \hat{D}_{\bar{y}}$. Более того, характеристическая форма (17.3) после такого приведения останется практически без изменений, лишь операторы $\hat{X}_i$ могут изменится: $\hat{X}_i \to \gamma_i(x,y)\hat{X}_i$.

Также из доказательства утверждения 17.1 видим, что для *фиксированного* уравнения $\hat{L}u = 0$ с оператором (17.1) получается *две* различные (не эквивалентные по отношению к калибровочным преобразованиям и растяжению характеристических операторов) характеристические системы (17.7) и для каждой фиксированной системы (17.8) получаем *два* различных (не эквивалентных по отношению к калибровочным преобразованиям $u \to g(x,y)u$) гиперболических уравнения второго порядка: одно для функции u_1 и второе для функции u_2. Это наблюдение и является основой для построения *каскадного метода интегрирования Лапласа* строго гиперболических уравнений второго порядка на плоскости $\hat{L}u = 0$ с операторами вида (17.1):

($\mathcal{L}_1$) если по крайней мере один из инвариантов Лапласа h или k обращается в ноль, то оператор $\hat{L}$ факторизуется (в «наивном» смысле), т.е. представляется в виде композиции двух операторов первого порядка (см. (17.6)); после подходящей замены независимых переменных $(x, y) \to (\overline{x}, \overline{y})$ можно без ограничения общности полагать $\hat{X}_1 = \hat{D}_{\overline{x}}$, $\hat{X}_2 = \hat{D}_{\overline{y}}$. Тогда мы получаем полное решение исходного уравнения в квадратурах: если, к примеру, $\hat{L}u = (\hat{D}_{\overline{x}} + \alpha_2(\overline{x}, \overline{y}))(\hat{D}_{\overline{y}} + \alpha_1(\overline{x}, \overline{y}))u = 0$, то $u = \exp\left(-\int \alpha_1\, d\overline{y}\right)\left(X(\overline{x}) + \int Y(\overline{y}) \exp\left(\int(\alpha_1\, d\overline{y} - \alpha_2\, d\overline{x})\right) d\overline{y}\right)$, где $X(\overline{x})$ и $Y(\overline{y})$ — произвольные функции характеристических переменных $\overline{x}$, $\overline{y}$.

($\mathcal{L}_2$) Если же $h \neq 0$, $k \neq 0$, преобразуем данное уравнение в одну из систем (17.7) (для определенности полагаем, что мы взяли левую систему (S_1)) и затем, найдя

$$u = (\hat{X}_1 v + \alpha_2 v)/h, \tag{17.10}$$

подставим это выражение в первое уравнение системы (S_1) из (17.7), получив X_1-*преобразованное* уравнение $\hat{L}_{(1)}v = \hat{X}_1\hat{X}_2 v + \big(\alpha_1 - P - \hat{X}_2(\ln h)\big)\hat{X}_1 v + (\alpha_2 - Q)\hat{X}_2 v + \big(\hat{X}_2(\alpha_2) - \hat{X}_1(\alpha_1) + \alpha_3 - \alpha_2\hat{X}_2(\ln h)\big)v = 0$. Это новое уравнение имеет инварианты Лапласа (см. [25])

$$\begin{aligned} h_{(1)} &= \hat{X}_1(2\alpha_1 - P) - \hat{X}_2(\alpha_2) - \hat{X}_1\hat{X}_2 \ln h + Q\hat{X}_2 \ln h \\ &\quad - \alpha_3 + (\alpha_1 - P)(\alpha_2 - Q) \;=\; 2h - k - \\ &\quad - \hat{X}_1\hat{X}_2 \ln h + Q\hat{X}_2 \ln h + \hat{X}_2(Q) - \hat{X}_1(P) + 2PQ, \\ k_{(1)} &= h. \end{aligned} \tag{17.11}$$

Если $h_{(1)} = 0$, мы можем решить это новое уравнение в квадратурах и, используя ту же дифференциальную подстановку (17.10), мы сможем получить полное решение исходного уравнения $\hat{L}u = 0$.

($\mathcal{L}_3$) Если вновь $h_{(1)} \neq 0$, применим описанное выше X_1-преобразование несколько раз. Получим последовательность операторов второго порядка $\hat{L}_{(2)}$, $\hat{L}_{(3)}$, $\ldots$ того же вида (17.3). Если на каком-либо шагу имеем $h_{(k)} = 0$, решим соответствующее уравнение $\hat{L}_{(k)} u_{(k)} = 0$ в квадратурах и, используя дифференциальные подстановки (17.10), получим полное решение исходного уравнения. В качестве альтернативы можно выполнять *$\hat{X}_2$-преобразования*: переписать исходное уравнение в форме правой системы (S_2) в (17.7) и, используя подстановку $u = (\hat{X}_2 w + \alpha_1 w)/k$, получить уравнение $\hat{L}_{(-1)} w = 0$ с инвариантами Лапласа

$$
\begin{aligned}
&h_{(-1)} = k, \\
&k_{(-1)} = 2k - h - \hat{X}_2 \hat{X}_1 \ln k - P \hat{X}_1 \ln k + \hat{X}_2(Q) - \\
&\qquad - \hat{X}_1(P) + 2PQ.
\end{aligned} \tag{17.12}
$$

Фактически $\hat{X}_2$-преобразование является обратным к $\hat{X}_1$-преобразованию с точностью до калибровочного преобразования. Тем самым мы имеем (бесконечную в общем случае) цепочку операторов второго порядка

$$
\ldots \xleftarrow{\hat{X}_2} \hat{L}_{(-2)} \xleftarrow{\hat{X}_2} \hat{L}_{(-1)} \xleftarrow{\hat{X}_2} \hat{L} \xrightarrow{\hat{X}_1} \hat{L}_{(1)} \xrightarrow{\hat{X}_1} \hat{L}_{(2)} \xrightarrow{\hat{X}_1} \ldots \tag{17.13}
$$

и соответствующую цепочку инвариантов Лапласа

$$
\ldots, h_{(-3)},\ h_{(-2)},\ h_{(-1)},\ h_0 = h,\ h_{(1)},\ h_{(2)},\ h_{(3)}, \ldots \tag{17.14}
$$

с рекуррентными формулами (17.11), (17.12). Сохранять инварианты $k_{(i)}$ в цепочке (17.14) нет необходимости, поскольку $k_{(i)} = h_{(i-1)}$. Если на каком-либо шаге получим $h_{(N)} = 0$, то цепочки (17.13) и (17.14) не могут быть продолжены: дифференциальная подстановка (17.10) не определена; именно на этом шаге соответствующее уравнение с частными производными факторизуется в композицию операторов первого порядка и мы сможем *в принципе* найти полное решение для любого из операторов цепочки (17.13). Однако для получения такого полного решения нам придется найти замену $(x,y)\mapsto(\bar{x},\bar{y})$, приводящую операторы $\hat{X}_i$ к каноническиму виду $\hat{X}_1=\hat{D}_{\bar{x}}$, $\hat{X}_2=\hat{D}_{\bar{y}}$ (см. параграф 2). Полное решение, как и раньше, будет иметь вид

$$\begin{aligned} u = c_0(\overline{x},\overline{y})\left(F+\textstyle\int G\beta\, d\overline{y}\right)+c_1(\overline{x},\overline{y})\left(F'+\textstyle\int G\frac{\partial\beta}{\partial\overline{x}}\, d\overline{y}\right)+\\ \ldots+c_n(\overline{x},\overline{y})\left(F^{(N)}+\textstyle\int G\frac{\partial^N\beta}{\partial\overline{x}^N}\, d\overline{y}\right), \end{aligned} \tag{17.15}$$

где $F(\overline{x})$, $G(\overline{y})$ — две произвольные функции соответствующей характеристической переменной и $c_i(\overline{x},\overline{y})$, $\beta(\overline{x},\overline{y})$ — некоторые определенные функции, получаемые в процессе преобразований Лапласа из коэффициентов исходного оператора (17.1). Также, если цепочка (17.13) конечна в обоих направлениях (т.е. $h_{(N)}=0$, $h_{(-K)}=0$ для некоторых $N\geq 0$, $K\geq 0$), можно получить свободное от квадратур полное решение исходного уравнения:

$$u=c_0F+c_1F'+\ldots+c_NF^{(N)}+d_0\widetilde{G}+d_1\widetilde{G}'+\ldots+d_{K-1}\widetilde{G}^{(K-1)} \tag{17.16}$$

с определенными функциями $c_i(\overline{x},\overline{y})$, $d_i(\overline{x},\overline{y})$ и $F(\overline{x})$, $\widetilde{G}(\overline{y})$ — двумя произвольными функциями соответствующей характеристической переменной.

Тем самым, лишь построение цепочек (17.13), (17.14) алгоритмично, т.е. требует только выполнения алгебраических операций и дифференцирования коэффициентов оператора (17.1). Нахождение полных решений (17.15), (17.16) существенно сложнее и фактически требует полного решения одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (2.7). Однако решение задачи Коши в этом случае иногда может быть получено при подходящих начальных условиях (см. конец § 18).

Как очевидно из описания алгоритма обобщенных преобразований Лапласа, фактически мы можем применять его и для произвольных недиагональных систем в характеристической форме (17.8):

($\mathcal{LS}_1$) Если по крайней мере один из недиагональных коэффициентов α_{12}, α_{21} обращается в ноль, то система (17.8) «факторизуется», т.е. является треугольной и может быть решена двумя квадратурами, если мы можем явно найти замену переменных, при которой $\hat{X}_1 = \hat{D}_{\overline{x}}$, $\hat{X}_2 = \hat{D}_{\overline{y}}$.

($\mathcal{LS}_2$) Если, например, $\alpha_{12} \neq 0$, преобразуем данную систему в одно уравнение второго порядка во *второй из двух* характеристических форм (17.3), исключая u_2:

$$u_2 = (\hat{X}_1 u_1 - \alpha_{11} u_1)/\alpha_{12}, \tag{17.17}$$

и подставляя это выражение во второе уравнение системы (17.8). Затем, записав это же уравнение второго порядка в первой из характеристических форм (17.3), преобразуем его в систему (S_1) из (17.7). Это и будет X_1-*преобразованием* исходной системы (17.8).

($\mathcal{LS}_3$) Если вновь $\alpha_{12} \neq 0$, применим описанное выше X_1-преобразование несколько раз. Получим последовательность систем вида (17.8). Если на каком-либо шагу имеем $\alpha_{12} = 0$, решим соответствующую систему в квадратурах и, используя дифференциальные подстановки (17.17), получим полное решение исходной системы. В качестве альтернативы можно выполнять $\hat{X}_2$-преобразования, описание которых полностью аналогично. Получаемая цепочка систем и цепочка (17.13) фактически совпадают, точнее между каждыми двумя операторами в цепочке (17.13) стоит система вида (17.8), как ясно из описания алгоритма ($\mathcal{L}_1$)–($\mathcal{L}_3$) преобразований операторов второго порядка и соответствующих шагов алгоритма ($\mathcal{LS}_1$)–($\mathcal{LS}_3$) преобразований систем.

18. Интегрирование модели Ферхюльста

Изложенная в предыдущем параграфе обобщенная теория преобразований Лапласа гиперболических уравнений и систем второго порядка на плоскости общего вида может быть с успехом применена к решению различных прикладных задач. Здесь мы изложим решение одной достаточно простой системы, возникающей в математической биологии, кинетике и других областях прикладной математики, изучающих недетерминированное поведение сложных систем. Математическое моделирование динамических систем, описание которых требует статистического подхода при наличии случайных возмущений и случайных внешних воздействий, приводит, как правило, к так называемым стохастическим дифференциальным уравнениям (см., например, [21, 41]).

Здесь мы рассмотрим простейший пример такого стохастического уравнения

$$\dot{x} = p(x) + \alpha(t)q(x), \tag{18.1}$$

где $x(t)$ — динамическая переменная, $p(x)$, $q(x)$ — заданные функции от x, $\alpha(t)$ — случайная функция с заданными статистическими характеристиками. Модель (18.1) возникает в различных прикладных задачах физики, химии и биологии (см. [21, 41] и указанную в них библиографию). Функции $p(x)$, $q(x)$ часто предполагаются полиномиальными. Например, если положить $p(x) = p_1x + p_2x^2$, $q(x) = q_2x^2$, $p_1 > 0$, $p_2 < 0$, $|p_2| > q_2 > 0$, то уравнение (18.1) описывает динамику популяций со случайными флуктуациями ресурсов (источников энергии, продуктов питания и т.п.) — классическую модель Ферхюльста. Ниже мы будем всюду полагать, что $\alpha(t)$ — бинарный (дихотомический) шум, $\alpha(t) = \pm 1$ с частотой переключения $\nu > 0$. Как можно показать (см. [41]), средние $W(x,t) = \langle \widetilde{W}(x,t) \rangle$ и $W_1(x,t) = \langle \alpha(t)\widetilde{W}(x,t) \rangle$ для плотности распределения $\widetilde{W}(x,t)$ в пространстве возможных траекторий $x(t)$ для случайного шума $\alpha(t)$ удовлетворяют следующей системе (часто называемой «master equations»):

$$\begin{cases} W_t + (p(x)W)_x + (q(x)W_1)_x = 0, \\ (W_1)_t + 2\nu W_1 + (p(x)W_1)_x + (q(x)W)_x = 0. \end{cases} \tag{18.2}$$

Предполагается, что начальное условие $W(x,0) = W_0(x)$ для плотности вероятности начального положения системы — за-данная функция. Для $W_1(x,t)$ получаем нулевые начальные условия при $t=0$: $W_1(x,0) = \langle \alpha(0)\widetilde{W}(x,0)\rangle = \langle\alpha(0)\rangle W_0(x) = 0$, поскольку $\langle\alpha(t)\rangle = 0$. Плотность распределения $W(x,t)$ должна быть неотрицательной и нормированной для любого t: $W(x,t) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} W(x,t)\,dx \equiv 1$.

Опираясь на полученные выше результаты, покажем, как получить решение системы (18.2) с параметрическими функциями $p(x)$, $q(x)$, соответствующими модели Ферхюльста: $p(x) = p_1x + p_2x^2$, $q(x) = q_2x^2$, $p_1 > 0$, $p_2 < 0$, $|p_2| > q_2 > 0$.

Характеристические операторы и левые собственные векторы системы (18.2) для произвольных $p(x)$, $q(x)$ найти просто: $\hat{X}_i = \hat{D}_t - \lambda_i\hat{D}_x$, $\lambda_{1,2} = -p(x) \pm q(x)$, $p_{11} = p_{21} = p_{22} = 1$, $p_{12} = -1$. Характеристическая система (17.8) для новых неизвестных характеристических функций $u_1 = W - W_1$, $u_2 = W + W_1$ имеет вид

$$\begin{cases} \hat{X}_1u_1 = -(p_x - q_x + \nu)\,u_1 + \nu\,u_2, \\ \hat{X}_2u_2 = \nu\,u_1 - (p_x + q_x + \nu)\,u_2. \end{cases} \tag{18.3}$$

Инварианты Лапласа равны $h = \nu^2 - [p_{xx}q^2(p+q) + p_x^2q^2 - p_xq_xq(3p+q) - q_{xx}pq(p+q) - q_x^2p(2p+q)]/q^2$, $k = \nu^2$, тем самым, если ν, $p(x)$ и $q(x)$ удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка $h = 0$, (18.2) может быть решена в квадратурах. Особенно простые формулы получаются для модели Ферхюльста $p(x) = p_1x + p_2x^2$, $q(x) = q_2x^2$: в этом случае $k = \nu^2$, $h = h_{(-2)} = \nu^2 - p_1^2$ и, если $\nu = \pm p_1$, (18.2) явно решается. Более того, как легко проверить, в этом случае цепочка преобразований Лапласа конечна в обе стороны, и решение системы может быть получено в виде, свободном от квадратур. Для записи окончательного ответа удобно воспользоваться безразмерной переменной $\tau = \nu t$, т.е. заменить $t \mapsto \tau$, $\nu \mapsto 1$, $p_1 \mapsto 1$ и изменить соответственно p_2, q_2. Для простоты мы будем использовать те же обозначения p_2, q_2 для полученных новых коэффициентов.

После преобразования Лапласа и применения процедуры интегрирования, описанной выше, получаем следующее выражение для полного решения (18.2), свободное от квадратур:

$$W = \frac{q_2}{x^2}\left[F'(\overline{x}) - F(\overline{x}) + G'(\overline{y}) - G(\overline{y})\right],$$

$$W_1 = \frac{1}{x^3}\left[-q_2 x G'(\overline{y}) + (1+p_2x)G(\overline{y}) + q_2 x F'(\overline{x}) + (1+p_2x)F(\overline{x})\right], \tag{18.4}$$

где $\overline{x} = -\tau + \ln\frac{x}{1+(p_2+q_2)x}$, $\overline{y} = -\tau + \ln\frac{x}{1+(p_2-q_2)x}$ — характеристические переменные ($\hat{X}_2\overline{x} = 0$, $\hat{X}_1\overline{y} = 0$), а F, G — две произвольные функции соответствующей характеристической переменной.

В случае $\nu^2 \neq p_1^2$ можно вычислить инварианты Лапласа в цепочке (17.14): $h_{(1)} = h_{(-3)} = \nu^2 - 4p_1^2$, $h_{(2)} = h_{(-4)} = \nu^2 - 9p_1^2$, $h_{(3)} = h_{(-5)} = \nu^2 - 16p_1^2, \ldots$, т.е. при заданных $p(x) = p_1x + p_2x^2$, $q(x) = q_2x^2$ и $\nu = \pm p_1$, $\nu = \pm 2p_1$, $\nu = \pm 3p_1, \ldots$ можно получить свободное от квадратур полное решение (18.2), при этом сложность ответа (17.15) будет соответственно возрастать.

Продемонстрируем теперь, как формулы (18.4) могут быть использованы для решения начальной задачи Коши рассматриваемой системы. Для этого положим $\tau = 0$ в выражениях для характеристических переменных $\overline{x}$, $\overline{y}$ и приравняем $W(x,0) = W_0(x)$, $W_1(x,0) = 0$. Поскольку теперь $\overline{x} = \ln\frac{x}{1+(p_2+q_2)x}$, $\overline{y} = \ln\frac{x}{1+(p_2-q_2)x}$, возможно выразить производные $F' = dF/d\overline{x}$, $G' = dG/d\overline{y}$ как $F' = \frac{dF}{dx}\frac{dx}{d\overline{x}}$, $G' = \frac{dG}{dx}\frac{dx}{d\overline{y}}$ и получить из (18.4) систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений на функции $F(x) = F(\overline{x}(x))$, $G(x) = G(\overline{y}(x))$. Эта система может быть явно решена для любой начальной функции $W_0(x)$ (см. объяснение этого факта в конце данного параграфа):

$$F(x) = \frac{1}{2q_2^2(1+(p_2+q_2)x)}\left[-x\int_{c_0}^{x}\frac{W_0(\theta)}{\theta}d\theta + (1+q_2x)\int_{c_1}^{x}W_0(\theta)\,d\theta\right],$$

$$G(x) = \frac{1}{2q_2^2(1+(p_2-q_2)x)}\left[x\int_{c_0}^{x}\frac{W_0(\theta)}{\theta}d\theta + (q_2x-1)\int_{c_1}^{x}W_0(\theta)\,d\theta\right]. \tag{18.5}$$

Выполняя обратную замену $F(\overline{x}) = F(x(\overline{x}))$, $G(\overline{y}) = G(x(\overline{y}))$ (для $\tau = 0$), находим «истинные» функции $F(\overline{x})$, $G(\overline{y})$ и подставляем их в формулы (18.4) для любого τ. Тем самым получим окончательный вид полученного решения задачи Коши:

$$W(x,\tau)=\frac{1}{2q_2x^2}\,[I_1(\hat{y})-I_1(\hat{x})]+\frac{W_0(\hat{y})}{2(e^\tau(1+(p_2-q_2)x)-x(p_2-q_2))^2}+$$

$$\frac{W_0(\hat{x})}{2(e^\tau(1+(p_2+q_2)x)-x(p_2+q_2))^2},$$

$$W_1(x,\tau)=\frac{I_1(\hat{y})-I_1(\hat{x})}{2q_2^2x^3}\left[(e^{-\tau}-1)p_2x-1\right]+\frac{e^{-\tau}}{2q_2^2x^2}\,[I_2(\hat{y})-I_2(\hat{x})]-$$

$$\frac{W_0(\hat{y})}{2(e^\tau(1+(p_2-q_2)x)-x(p_2-q_2))^2}+\frac{W_0(\hat{x})}{2(e^\tau(1+(p_2+q_2)x)-x(p_2+q_2))^2},$$

где

$$\hat{x}=\frac{x}{(e^\tau(1+(p_2+q_2)x)-x(p_2+q_2))},\quad I_1(z)=\int_{c_1}^{z}W_0(\theta)\,d\theta,$$

$$\hat{y}=\frac{x}{(e^\tau(1+(p_2-q_2)x)-x(p_2-q_2))},\qquad I_2(z)=\int_{c_0}^{z}\frac{W_0(\theta)}{\theta}d\theta,$$

c_0 и c_1 могут быть выбраны произвольно.

Как можно проверить, $\hat{x}<\hat{y}$ для всех $\tau\geq 0$, $x\geq 0$.

Особенно простой вид получаем при выборе начальных данных в виде дельта-функции $W_0(x)=\delta(x-x_*)$, что соответствует (неслучайному) выбору некоторого фиксированного начального положения $x(0)=x_*>0$ динамической системы (18.1):

$$W(x,\tau)=\frac{\delta(\hat{x}-x_*)}{2(e^\tau(1+(p_2+q_2)x)-x(p_2+q_2))^2}+$$

$$+\frac{\delta(\hat{y}-x_*)}{2(e^\tau(1+(p_2-q_2)x)-x(p_2-q_2))^2}+\frac{H(\hat{y}-x_*)-H(\hat{x}-x_*)}{2q_2x^2}.$$

Здесь $H(z)=\int_{-\infty}^{z}\delta(\theta)\,d\theta$ — функция Хевисайда.

Используя стандартную формулу $\delta(\phi(x)) = \delta(\phi^{-1}(0))/\phi'(\phi^{-1}(0))$, получаем

$$\frac{\delta(\hat{x}-x_*)}{2(e^\tau(1+(p_2+q_2)x)-x(p_2+q_2))^2} = \frac{\delta(x-\frac{e^\tau x_*}{1-(p_2+q_2)(e^\tau-1)x_*})}{2e^\tau},$$

$$\frac{\delta(\hat{y}-x_*)}{2(e^\tau(1+(p_2-q_2)x)-x(p_2-q_2))^2} = \frac{\delta(x-\frac{e^\tau x_*}{1-(p_2-q_2)(e^\tau-1)x_*})}{2e^\tau}.$$

Упрощая $H(\hat{x}-x_*)$, $H(\hat{y}-x_*)$ аналогичным образом, получаем следующее простое выражение для решения начальной задачи Коши:

$$W(x,\tau) = \frac{e^{-\tau}}{2}\Big[\delta(x-\tfrac{e^\tau x_*}{1-(p_2+q_2)(e^\tau-1)x_*}) + \delta(x-\tfrac{e^\tau x_*}{1-(p_2-q_2)(e^\tau-1)x_*})\Big]$$
$$+\frac{1}{2q_2x^2}\left[H(x-\tfrac{e^\tau x_*}{1-(p_2-q_2)(e^\tau-1)x_*}) - H(x-\tfrac{e^\tau x_*}{1-(p_2+q_2)(e^\tau-1)x_*})\right],$$

$$W_1(x,\tau) = \frac{e^{-\tau}}{2}\Big[\delta(x-\tfrac{e^\tau x_*}{1-(p_2+q_2)(e^\tau-1)x_*}) - \delta(x-\tfrac{e^\tau x_*}{1-(p_2-q_2)(e^\tau-1)x_*})\Big]$$
$$+\frac{1}{(2e^\tau q_2^2x^3x_*)}\Big[((p_2x+1)e^\tau x_*-(p_2x_*+1)x)H(x-\tfrac{e^\tau x_*}{1-(p_2+q_2)(e^\tau-1)x_*})$$
$$-((p_2x+1)e^\tau x_*-(p_2x_*+1)x)H(x-\tfrac{e^\tau x_*}{1-(p_2-q_2)(e^\tau-1)x_*})\Big]. \tag{18.6}$$

Это решение (а тем самым и полное решение для любых нормированных начальных условий) очевидным образом удовлетворяет необходимым физическим условиям положительности и нормировки: $W(x,t) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} W(x,t)\,dx \equiv 1$. Асимптотически, при $\tau \to \infty$, данное решение экспоненциально быстро сходится к стационарному распределению вероятности $W_\infty(x) = 1/(2q_2x^2)$ внутри интервала $\frac{1}{|p_2-q_2|} < x < \frac{1}{|p_2+q_2|}$ и к $W_\infty(x) = 0$ вне этого интервала.

Замечание 1. Для проверки того, что выписанные решения (18.6) действительно удовлетворяют (18.2), необходимо принимать в расчет известные тождества для дельта-функции $\phi(x)\delta(\phi(x)) = 0$, $\phi(x)\delta'(\phi(x)) = -\delta(\phi(x))$.

Замечание 2. Решение задачи Коши для интегрируемых по Лапласу систем. Формулы (18.5) были получены интегрированием системы (18.4) на неизвестные функции F, G после подстановки $\tau \equiv 0$, $W \equiv W_0(x)$, $W_1 \equiv 0$. Однако этого шага (требующего интегрирования системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами) можно избежать. Более того, решение задачи Коши может быть получено для любой системы (17.8), интегрируемой по Лапласу, т.е. сводящейся некоторой последовательностью преобразований Лапласа к треугольной системе

$$\begin{cases} \hat{X}_1 u_1 = \alpha_{11}(x,y)\, u_1, \\ \hat{X}_2 u_2 = \alpha_{21}(x,y)\, u_1 + \alpha_{22}(x,y)\, u_2. \end{cases} \tag{18.7}$$

Действительно, пусть задано начальное условие для исходной системы (17.8): $u_1(x=0,y) = u_{10}(y)$, $u_2(x=0,y) = u_{20}(y)$. Переписав (17.8) в стандартном виде (17.2), видим, что при $x = 0$ нам известны производные $(u_i)_x(0,y)$, наравне с $(u_i)_y(0,y) = u'_{i0}(y)$. Можно также найти значения этих производных по x из характеристической системы (17.8), явно расписав $\hat{X}_i = m_i \hat{D}_x + n_i \hat{D}_y$. Следовательно, мы можем из (17.10) найти соответствующие начальные условия для системы, полученной из исходной преобразованием Лапласа. Проходя по цепочке преобразованных систем, находим начальные условия Коши конечной системы (18.7) цепочки. Если нам известен явный вид замены $(x,y) \mapsto (\bar{x},\bar{y})$, приводящей $\hat{X}_i$ к каноническому виду $\hat{X}_1 = \hat{D}_{\bar{x}}$, $\hat{X}_2 = \hat{D}_{\bar{y}}$, мы сможем решить (18.7) с пересчитанными начальными данными Коши двумя квадратурами и, пройдя обратно по цепочке преобразований Лапласа, найти соответствующее решение задачи Коши исходной системы. Если замена $(x,y) \mapsto (\bar{x},\bar{y})$ не может быть явно найдена, при *некоторых* начальных данных Коши, возможно, удастся найти решение (18.7) и потом перевести его преобразованиями Лапласа в решение исходной системы.

19. Проблема Монжа

В § 16 существенным инструментом, позволившим устранить квадратуры из окончательного ответа, послужил алгоритм Гурса [47] решения одного частного случая *проблемы Монжа*. Ниже мы приводим основные сведения о современном состоянии данной проблемы, которая носит достаточно общий характер и полное решение которой было бы весьма полезно для различных задач интегрирования дифференциальных уравнений.

Первоначальный результат Монжа [57] состоял в следующем:

Теорема 19.1. *Для любого нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения на две неизвестные функции* $y(x)$, $z(x)$*:*

$$F\bigl(x, y(x), z(x), y'(x), z'(x)\bigr) = 0 \tag{19.1}$$

можно найти его полное параметрическое решение

$$\begin{cases} x = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t)), \\ y = g(t, \varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t)), \\ z = h(t, \varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t)), \end{cases} \tag{19.2}$$

где $\varphi(t)$ *—* произвольная параметрическая функция *новой переменной* t*.*

В более общем случае под проблемой Монжа чаще всего понимают следующую задачу. Пусть дана *недоопределенная* система (нелинейных) дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} F_1\bigl(x, y_1(x), ..., y_n(x), y_1'(x), ..., y_n'(x), ..., y_1^{(k)}(x), ..., y_n^{(k)}(x)\bigr) = 0, \\ \vdots \\ F_s\bigl(x, y_1(x), ..., y_n(x), y_1'(x), ..., y_n'(x), ..., y_1^{(k)}(x), ..., y_n^{(k)}(x)\bigr) = 0, \end{cases} \tag{19.3}$$

т.е. $s < n$. Требуется найти, если возможно, ее полное параметрическое решение (или хотя бы выяснить, существует или нет такое решение):

$$\begin{cases} x &= f\big(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{n-s}(t), \varphi_1'(t), \ldots, \varphi_{n-s}^{(m)}(t)\big) = 0, \\ y_1 &= g_1\big(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{n-s}(t), \varphi_1'(t), \ldots, \varphi_{n-s}^{(m)}(t)\big) = 0, \\ &\vdots \\ y_n &= g_n\big(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{n-s}(t), \varphi_1'(t), \ldots, \varphi_{n-s}^{(m)}(t)\big) = 0. \end{cases} \tag{19.4}$$

Здесь $\varphi_k(t)$ — произвольные параметрические функции новой переменной t.

В различных эквивалентных формах приведенная выше задача встречается достаточно часто и привлекала внимание многих выдающихся математиков (см. [31, 32, 33, 42, 47, 48, 49] и библиографию в [72]). Работа [48] — единственная известная нам, в которой была предпринята попытка обобщить исходную постановку (19.3) на недоопределенные системы дифференциальных уравнений с частными производными.

Известно, что в общем случае решение проблемы Монжа невозможно ([49]). Мы в § 16 использовали частичный результат Гурса [47] о разрешимости поставленной задачи для систем (19.3), каждое уравнение которых включает лишь первые производные неизвестных функций y_i' и не включает сами y_i и x:

$$\begin{cases} F_1\big(y_1'(x), \ldots, y_n'(x)\big) = 0, \\ \qquad\qquad \vdots \\ F_s\big(y_1'(x), \ldots, y_n'(x)\big) = 0, \end{cases} \qquad s < n. \tag{19.5}$$

Процедура решения для простейшего случая (19.1), предложенная Монжем, состоит из следующих шагов:

1. Исключая y', z' из системы

$$\begin{cases} F(x, y, z, y', z') = 0, \\ z' = p + qy', \\ F_{y'} + qF_{z'} = 0, \end{cases}$$

где p, q — некоторые новые переменные, найдем соотношение $G(x, y, z, p, q) = 0$. Рассмотрим это соотношение как дифференциальное уравнения первого порядка с частными производными на $z = z(x, y)$ с $p = z_x$, $q = z_y$.

2. Найдем двухпараметрическое решение этого уравнения с частными производными, возможно, в неявном виде: $V(x,y,z,a,b) = 0$ (такое решение называлось классиками «полным»; зная его, можно найти действительно полное решение данного уравнения).

3. Полагая $b = \varphi(a)$, найдем x, y, z из следующей системы:

$$\begin{cases} V(x,y,z,a,\varphi(a)) = 0, \\ \frac{dV}{da} = V_a + \varphi' V_b = 0, \\ \frac{d^2V}{da^2} = V_{aa} + 2\varphi' V_{ab} + \varphi'' V_b + (\varphi')^2 V_{bb} = 0. \end{cases} \tag{19.6}$$

Полученное решение и даст нужное параметрическое представление (19.2), если положить $t \equiv a$.

Как очевидно, эта процедура требует нахождения двухпараметрического решения нелинейного уравнения в частных производных $G(x,y,z,p,q) = 0$, связанного с (19.1) указанным выше способом. Это является алгоритмически сложной задачей.

На геометрическом языке внешних форм задача (19.1) переформулируется следующим простым образом: в 5-мерном пространстве $\mathbf{R}^5$ с координатами $\{(x,y,z,y^{(1)},z^{(1)})\}$ рассмотрим естественную систему из одного алгебраического соотношения и двух пфаффовых форм:

$$\begin{cases} F(x,y,z,y^{(1)},z^{(1)}) = 0, \\ \omega_1 = dy - y^{(1)}dx, \\ \omega_2 = dz - z^{(1)}dx. \end{cases} \tag{19.7}$$

Можно разрешить алгебраическое уравнение относительно одной из координат, скажем, $z^{(1)}$: $z^{(1)} = Z(x,y,z,y^{(1)})$ и подставить полученное выражение в ω_2. Получаем в $\mathbf{R}^4 = \{(x,y,z,y^{(1)})\}$ систему из двух уравнений Пфаффа: $\{\omega_1 = 0, \omega_2 = 0\}$.

Что необходимо сделать на языке систем Пфаффа, чтобы получить решение (19.2)? Необходимо найти (локальный) диффеоморфизм 4-мерного пространства $(x,y,z,y^{(1)}) \longleftrightarrow$

$(t, \varphi, \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$ такой, что имеющаяся пфаффова система в $\mathbf{R}^4$ перейдет в каноническую систему

$$\begin{cases} \widetilde{\omega}_1 = d\varphi - \varphi^{(1)} dt, \\ \widetilde{\omega}_2 = d\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)} dt. \end{cases} \tag{19.8}$$

Диффеоморфизм и задаст требуемое решение (19.2): $x = f(t, \varphi, \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}) \equiv f(t, \varphi, \varphi', \varphi'')$, ... Как гарантирует теорема Монжа 19.1, этот диффеоморфизм всегда существует.

Для общего случая недоопределенной системы (19.3) можно взять в $\mathbf{R}^N = \{(x, y_1, \ldots, y_n, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(k)})\}$, систему пфаффовых уравнений $\{\omega_{11} = dy_1 - y_1^{(1)}\, dx,\ \ldots,\ \omega_{nk} = dy_n^{(k-1)} - y_n^{(k)}\, dx\}$ и добавить к ней исходную систему (19.3) как совокупность алгебраических соотношений между координатами в $\mathbf{R}^N$. Решение задачи (по Картану) будет состоять в нахождении диффеоморфизма в $\mathbf{R}^{N-s}$ (предварительно мы исключаем с помощью алгебраических соотношений некоторые из координат), приводящего полученную пфаффову систему к *каноническому виду Гурса* — прямому обобщению (19.8):

$$\{d\varphi_k - \varphi_k^{(1)} dt = 0, d\varphi_k^{(1)} - \varphi_k^{(2)} dt = 0, \ldots\}. \tag{19.9}$$

Именно в указанной геометрической форме проблема Монжа привлекла в последние годы внимание специалистов по теории оптимального управления. В работах [51, 58, 60, 62, 63, 66, 67] и других были получены важные общие результаты (к сожалению, не разрешающие проблему Монжа полностью) и продемонстрированы важные применения в робототехнике и автоматическом управлении неголономными механическими системами.

Отметим, что в часто цитируемой работе Картана [33] был дан некоторый простой критерий разрешимости проблемы Монжа в случае $s = n - 1$. Именно, при подобном соотношении между s и n мы имеем в соответствующем пространстве $\mathbf{R}^{N-s}$ (после исключения части исходных переменных с помощью алгебраических соотношений (19.3)) 2-мерное распределение: в каждой точке $x \in \mathbf{R}^{N-s}$ пфаффовы формы системы задают 2-мерное подпространство векторов $I_2(x)$, на которых эти формы обращаются в ноль. Определим в каждой точке $\mathbf{R}^{N-s}$ флаг возрастающих подпространств: $I_2(x)$ (исходное распределение), $I_3 = I_2 + [I_2, I_2]$ (подпространство, порожденное I_2 и коммутаторами векторных полей, порождающих I_2), $I_4 = I_3 + [I_3, I_3]$, ..., $I_{N-s} = I_{N-s-1} + [I_{N-s-1}, I_{N-s-1}]$. *Критерий Картана* разрешимости проблемы Монжа в данном случае (т.е. приводимости исходной пфаффовой системы к канонической форме (19.9) в случае $s = n - 1$) состоит в требовании, чтобы

$$\dim I_{i+1} = \dim I_i + 1. \tag{19.10}$$

В частности, $I_{N-s} = \mathbf{R}^{N-s}$.

Однако следует иметь в виду, что критерий Картана работает лишь для заранее заданного порядка дифференциального продолжения (неформально говоря, если мы априори ограничим порядок производных функций $\varphi_k(t)$ в параметрическом представлении искомого решения (19.4)). Как показано в современных работах [66, 67], априорные «естественные» ограничения этого порядка могут привести к потере решения, которое существует лишь для бо́льших порядков продолжения (т.е. требует добавления к исходной системе (19.3) некоторого количества полных производных по x от исходных уравнений и соответственного увеличения количества переменных $y_n^{(i)}$ в формулировке на языке внешних форм). Отметим, что в работе Д. Гильберта [49] подобного априорного ограничения нет.

20. Заключительные замечания. Открытые проблемы

Наиболее общим способом интегрирования экспоненциальных систем с произвольной матрицей Картана, соответствующей простой алгебре Ли, является метод, предложенный в [14, Гл. III, IV] и основанный на теории представлений соответствующих алгебр. Он позволяет в принципе выписывать решения для любой из серий A_n, B_n, C_n, D_n и исключительных алгебр E_6–E_8, F_4, G_2. Однако этот метод приводит к квадратурам в окончательных формулах и, как указывают сами авторы [14, стр. 147], «...является конструктивным лишь для серии A_r, тогда как для остальных простых алгебр Ли (в рамках приведенной в этом пункте схемы) требует детального анализа структуры их корневых подпространств ...» В [14, стр. 147–151] даются явные формулы для решение задачи в случае серии A_n. Для других серий фактически приходится прибегать к *рекуррентной* процедуре (для нахождения старших весов фундаментальных представлений). При этом формулы (1.18)–(1.25) в [14, стр. 146–148] для серии A_n фактически эквивалентны формулам Дарбу (14.1). Представляет интерес сравнить изложенные в данном пособии рекуррентные формулы для серий B_n, C_n и соответствующие результаты [14]. В последнее время проблема упрощения получаемых с помощью теории представлений формул для метода [14] активно изучалась [15, 16].

Как очевидно, все способы, предлагаемые Дарбу для интегрирования серии A_n, *не рекуррентны* (§ 11, и существенное упрощение в § 14, формулы (14.1)). Интересно найти аналог рекуррентной процедуры, основанной на каком-либо преобразовании общего уравнения Лапласа (3.1), сходного по свойствам с преобразованиями Мутара и Гурса. По-видимому, таким аналогом может служить подробно изученное в [37] «преобразование F», которое, как показано в [37, § 21, § 24], обладает всеми свойствами перестановочности, выражаемыми диаграммами рис. 10–11.

Интригующим фактом является отсутствие каких-либо других методов интегрирования для серии D_n и исключительных алгебр Ли E_6–E_8, F_4, G_2, кроме методов [14]. Поэтому важно изучить **общую задачу редукции**: *для конечных цепочек (3.9) найти все возможные соотношения между инвариантами h_i, совместимые с уравнениями (3.10).* Известны лишь указанные в § 10 редукции к B_n, C_n, G_2.

Следует отметить, что для уравнения Мутара существуют явные формулы («формулы пфаффианов», [26, 56]), выражающие результат n-кратного применения преобразования Мутара к произвольному начальному уравнению через n решений начального уравнения (фактически обобщающие «формулу куба» рис. 11 на случай гиперкуба с n начальными ребрами). Однако они предполагают вычисление пфаффианов — квадратных корней из определителей кососимметрических матриц четного порядка. Вычислять эти выражения (как, впрочем, и определители высокого порядка в формулах Дарбу), по-видимому, все равно придется рекуррентно. Поэтому представляет большой интерес эффективизация и сравнение всех упомянутых подходов к решению задачи интегрирования серии C_n: рекуррентный метод Мутара (§ 12), упрощенный метод Дарбу (§ 14), основанный на рекуррентном построении антисамосопряженных операторов и их решений (§ 13), «метод куба» (см. конец § 12) и формулы пфаффианов [26, 56].

Для серии B_n (связанной с уравнениями Гурса) мы имеем общий метод [14], а также изложенный в § 15 аналог упрощенного метода Дарбу с рекуррентным применением преобразования Гурса, использующий теоремы 9.1, 9.3 и следствие 9.2, и два метода получения бесквадратурных формул параграфа 16. Заслуживает внимания поиск аналога формул пфаффианов для этой серии.

За последние 20 лет было опубликовано более 100 работ, посвященных различным аспектам интегрируемости цепочек уравнений (10.1) (называемых в литературе обычно «двумеризованными цепочками Тоды» (10.2)) как в случае конечных цепочек, так и для периодических цепочек. Появились некоторые обобщения на случай многих независимых переменных x, y, $\ldots$ и систем вида $\{u^i_{xy} = F^i(u, u_x)\}$. Недавно в [13] изучалась задача классификации скалярных уравнений вида $u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$, интегрируемых в явном виде («интегрируемых по Дарбу»). Естественно попытаться обобщить эти результаты на случай более общих скалярных уравнений

$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$ (см. [25]), уравнений порядка выше второго или систем $\{u^i_{xy} = F^i(x, y, u, u_x, u_y)\}$.

Не претендуя на обзор даже важнейших публикаций, укажем [1], [3], [27], [38], [54], [61], [71]; см. также библиографию работы [22].

Изложенный в § 18 пример использования преобразований Лапласа для явного решения одной задачи, возникающей в теории стохастических систем и недавний результат [20] показывают большие потенциальные возможности применения изложенных нами классических методов и их современных обобщений к решению актуальных математических и физических задач. Как видно из результатов работ [28, 68, 69], метод Лапласа допускает обобщение на системы порядка, бóльшего двух или имеющие более двух независимых переменных.

Библиографический список

[1] *Андреев, В.А.* Преобразование Беклунда для цепочек Тоды/ В.А. Андреев // Теоретическая и матем. физика.— 1988.— Т. 75.— No 3.—С. 340–352.

[2] *Барут, А.* Теория представлений групп и ее приложения. Т. 1–2./ А. Барут, Р. Рончка.— М.: Мир, 1980.

[3] *Бормисов, А.А.* Об интегрируемости гиперболических систем типа уравнений Риккати/ А.А. Бормисов, Е.С. Гудков, Ф.Х. Мукминов // Теоретическая и матем. физика.— 1997.— Т. 113.—No 2.—С. 261–275.

[4] *Ганжа, Е.И.* Алгебраическая формула суперпозиции и преобразования Бэклунда (2+1)-мерных интегрируемых систем / Е.И. Ганжа, С.П. Царев // Успехи матем. наук.—1996.—No 6.—С. 197–198; см. также `solv-int@xyz.lanl.gov`, No 9606003.

[5] *Ганжа, Е.И.* Об интегрировании серии B_n экспоненциальных систем типа I / Е.И. Ганжа, С.П. Царев // Вестник КГУ (Физ.-мат. науки) 2004.—No 1.—С. 150–162.

[6] *Ганжа, Е.И.* Об одном аналоге преобразования Мутара для уравнения Гурса $\vartheta_{xy} = 2\sqrt{\lambda(x,y)\vartheta_x\vartheta_y}$ / Е.И.Ганжа // Теоретич. и математич. физика.—2000.—Т. 122.—N 1.— С. 50–57.

[7] *Ганжа, Е.И.* О приближении преобразованиями Беклунда решений некоторых (2+1)-мерных интегрируемых систем/ Е.И. Ганжа // Сибирский матем. журнал.—2000.—Т. 41.— N 3.—С. 541–553.
см. также: *Ganzha E.I.* On completeness on the Moutard transformations// e-print `solv-int@xyz.lanl.gov`, 1996, No 9606001.
Ganzha E.I. On completeness of the Ribaucour transformations for triply orthogonal curvilinear coordinate

systems in $\mathbf{R}^3$// e-print `solv-int@xyz.lanl.gov`, 1996, No 9606002.

[8] *Гото, М.* Полупростые алгебры Ли./ М. Гото, Ф. Гроссханс.— М.:Мир.—1981.

[9] *Гурса, Э.* Курс математического анализа. /Э. Гурса.— М.-Л: ГИТТЛ.—1933. Т. 3, ч. 1, гл. XXIV.

[10] *Егоров, Д.Ф.* Уравнения с частными производными 2-го порядка по двум независимым переменным. Общая теория интегралов; характеристики/ Д.Ф. Егоров // Ученые Записки Императорского Моск. Ун-та.— 1899.—Вып. 15.—392 с.

[11] *Жибер, А.В.* Метод каскадного интегрирования Лапласа и уравнения, интегрируемые по Дарбу: Учебное пособие./ А.В. Жибер, В.В. Соколов Уфа:БашГУ, 1996.—56 с.

[12] *Жибер, А.В.* О нелинейных гиперболических уравнениях, интегрируемых по Дарбу/ А.В. Жибер, В.В. Соколов, С.Я. Старцев // Доклады РАН.—Т. 343.—1995.—N 6.—С. 746–748.

[13] *Жибер, А.В.* Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа/ А.В. Жибер, В.В. Соколов // Успехи матем. наук.—2001.— No 1.—С. 63–106.

[14] *Лезнов, А.Н.* Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем./ А.Н. Лезнов, М.В. Савельев.— М.: Наука, 1985.

[15] *Лезнов, А.Н.* Новый подход к теории представлений полупростых алгебр и квантовых алгебр / А.Н. Лезнов // Теоретическая и матем. физика.—2000.—Т. 123.—No 2.— С. 264–285.

[16] *Лезнов, А.Н.* Градуированные алгебры Ли, теория представлений, интегрируемые отображения и интегрируемые системы/ А.Н. Лезнов // Теоретическая и матем. физика.—2000.—Т. 122.—No 2.— С. 251–271.

[17] *Лопатинский, Я.Б.* Линейные дифференциальные операторы: Дис. д.ф.-м.н., 71 с./ Я.Б. Лопатинский.— Баку, 1946. Перепечатано в: *Я.Б. Лопатинский.* Теория общих граничных задач.—Киев, 1984.

[18] *Маркушевич, А.И.* Теория аналитических функций./ А.И. Маркушевич.— М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.

[19] *Петровский, И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными./ И.Г. Петровский.— М.: Наука, 1961.

[20] *Тайманов, И.А.* Двумерные операторы Шредингера с быстро убывающим рациональным потенциалом и многомерным L_2-ядром / И.А. Тайманов, С.П. Царев // Успехи Матем. Наук.—2007.—Т. 62.—No 3.—С. 217–218.

[21] *Хорстхемке, В.* Индуцированные шумом переходы: Теория и применение в физике, химии и биологии/ В. Хорстхемке, Р. Лефевр М.— Мир, 1987.—400 с.

[22] *Царев, С.П.* О нелинейных уравнениях с частными производными, интегрируемых по Дарбу/ С.П. Царев // Труды Матем. Ин-та им. В.А.Стеклова.—1999.—Т. 224.— С. 389–399.

[23] *Шабат, А.Б.* Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана/ А.Б. Шабат, Р.И. Ямилов.— Препр. Уфа: Башкирский филиал АН СССР.—1981.—22 с.

[24] *Леонард Эйлер.* Интегральное исчисление. Том III, Перевод с латинского и комментарии Ф.И. Франкля.—ГИФМЛ: М., 1958.—448 с.

[25] *Anderson I.M., Kamran N.* The Variational Bicomplex for Second Order Scalar Partial Differential Equations in the Plane// Duke Math. J. 1997.—V. 87.—N 2.—P. 265–319.

[26] *Athorne C., Nimmo J.J.C.* On the Moutard transformation for integrable partial differential equations// Inverse Problems.— 1991.—V. 7.—P. 809–826.

[27] *Athorne C.* On the characterization of Moutard transformations// Inverse Problems.— 1993.—V. 9.—P. 217–232.

[28] *Athorne C.* A $\mathbf{Z}^2 \times \mathbf{R}^3$ Toda system. Phys. Lett. A.— 206:162–166.—1995.

[29] Bäcklund transformations (ed. R.M.Miura), Lect. Notes Math., V. 515. Springer-Verlag, 1976.

[30] *Bianchi L.* Lezioni di geometria differenziale, 3-a ed., V. 1–4, Bologna:Zanichielli, 1923–1927.

[31] *Cartan É.* Sur l'intégration de certains systèmes de Pfaff de caractère deux// Bulletin de la Société Mathématique de France.—t. 29.—P. 233–302.—1901. (Oeuvres complètes, Part. II, Vol. 1, Gauthiers-Villars, Paris.)

[32] *Cartan É.* Sur l'équivalence absolue de certains systèmes d'équations différentielles et sur certaines familles de courbes. Bulletin de la Société Mathématique de France.— 42:12–48.—1914. (Oeuvres complètes, Part. II, Vol. 2, Gauthiers-Villars, Paris.)

[33] *Cartan É.* Sur l'intégration de certains systèmes indéterminés d'équations différentielles// J. reine angew. Math..—V. 145.—P. 86–91.—1915.

[34] *Darboux G.* Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. T. 2. Paris: Gautier-Villars, 1915.

[35] *Darboux G.* Sur le problème de Pfaff// Bulletin des Sciences mathématiques.—V. 2(6).—P. 14–36.—49–68.—1882.

[36] *Drach J.* Sur la transformation et l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes par l'usage explicite des caractéristiques d'Ampère // Atti Congresso Internaz. Mat. Bologna.—1930.— V. 3.— P. 11–25.

[37] *Eisenhart L.P.* Transformations of surfaces. Princeton (1923), 2nd ed.- Chelsea (1962).

[38] *Etingof P., Gelfand I., Retakh V.* Factorization of differential operators, quasideterminants, and nonabelian Toda field equations// Math. Res. Lett.—1997.—V. 4.—No 2–3.—P. 413–425; also e-print `q-alg@xyz.lanl.gov`, 1997, No 9701008.

[39] *Ferapontov E.V.* Laplace transformations of hydrodynamic type systems in Riemann invariants: periodic sequences// J. Phys A: Math. Gen.— V. 30.—P. 6861–6878.—1997.

[40] *Forsyth A.R.* Theory of differential equations. Part IV, vol. VI. Cambridge, 1906.

[41] *Ganzha E.I., Loginov V.M., Tsarev S.P.* Exact solutions of hyperbolic systems of kinetic equations. Application to Verhulst model with random perturbation // e-print `http://www.arxiv.org/`, 2006, math.AP/0612793.

[42] *Goursat É.* Leçons sur le problème de Pfaff. Hermann, Paris, 1923.

[43] *Goursat É.* Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du seconde ordre a deux variables indépendants. T. 2. Paris: Hermann, 1898.

[44] *Goursat É.* Sur une équation aux dérivées partielles// Bull. Soc. Math. France.—1897.—V. 25.—P. 36–48.

[45] *Goursat É.* Sur une transformation de l'équation $s^2 = 4\lambda(x,y)\,p\,q$// Bull. Soc. Math. France.—1900.—V. 28.— P. 1–6.

[46] *Goursat É.* Sur les équations linéaires et la méthode de Laplace// Amer. J. Math.—18:347–385.—1896.

[47] *Goursat É.* Sur le problème de Monge// Bull. Soc. Math. France— 1905.— V. 33.— P. 201–210.

[48] *Goursat É.* Sur une généralisation du problème de Monge// Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse—1930.—V. 22.—P. 249–295.

[49] *Hilbert D.* Über den Begriff der Klasse von Differentialglechungen// Math. Annalen—1912.—Bd. 73.— P. 95–108.

[50] *Kamran N., Tenenblat K.* Laplace transformations in higher dimensions. Duke Math. J.—V. 84(1).—P. 237–266.—1996.

[51] *Kumpera, A.* Flag systems and ordinary differential equations// Annali di Mat. Pura Appl. (4) t. 177 (1999).— P. 315–329.

[52] Recherches sur le Calcul integral aux differences partielles, par *M. de la Place.* Memoires de Mathematique et de Phvsique de l'Academie des Sciences pour 1773.—P. 341–403. Imprime en 1777. Также Oeuvres de Laplace, t. IX, P. 5.

[53] *Le Roux J.* Extensions de la méthode de Laplace aux équations linéaires aux derivées partielles d'ordre supérieur au second// Bull. Soc. Math. de France.— V. 27.— P. 237–262.—1899. A digitized copy is obtainable from `http://www.numdam.org/`

[54] *Leznov A.N.* Integrable systems in spaces of arbitrary dimension // e-print `math-ph@xyz.lanl.gov`, 1999, No 9908012.

[55] *Liouville J.* Sur l'équation aux differences partielles $\frac{d^2 \log \lambda}{du\, dv} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0$// J. de Math. Pures Appl. 1853.—V. 18.—P. 71–72.

[56] *Matveev V.B., Salle M.A.* Darboux transformations and solitons. Springer-Verlag, 1991.

[57] *Monge G.* Supplement où l'on fait voir que les équations aux différences ordinaires, pour lesquelles les conditins d'intégrabilite ne sont pas satisfaites, sont susceptibles d'une veritable intégration, et que c'est de cette intégration que dépend celle des équations aux différences patrielles elevées// Hist. Acad. Sci. Paris.— 1784.— P. 502–576. Электронная версия доступна с

`http://gallica.bnf.fr/scripts/ConsultationTout.exe?E=0&O=n003583.htm`

[58] *Montgomery R, Zhitomirskii M.* Geometric approach to Goursat flags// Annales De l'Institut Henri Poincare (Analyse non lineaire) 18 (4): 459-493 2001.

[59] *Moutard T.* Sur la construction des équations de la forme $\frac{1}{z}\frac{d^2 z}{dx\, dy} = \lambda(x, y)$, qui admettent une intégrale générale explicite// J. École Polytechnique.— 1878.—V. 45.—P. 1–11.

[60] *Murray R.M.* Control of nonholonomic systems using chained form// In: Dynamics and control of mechanical systems. The falling cat and related problems. Fields Inst. Communications.—V. 1.—1993.—P. 219–245.

[61] *Nimmo J.J.C., Schief W.K.* Superposition principles associated wiht the Moutard transformations: an integrable discretizaton of a (2+1)-dimensional sine-Gordon system// Proc. R. Soc. London.—1997.—V. A453.—P. 255–279.

[62] *Pasillas-Lépine W., Respondek W.* On the Geometry of Goursat Structures// e-print math.DG/9911101 at `http://www.archiv.org/`.

[63] *Pasillas-Lépine W., Respondek W.* Contact Systems and Corank One Involutive Subdistributions// e-print math.DG/0004124 at `http://www.archiv.org/`.

[64] *Petrén L. Extension de la méthode de Laplace aux équations* $\sum_{i=0}^{n-1} A_{1i}\frac{\partial^{i+1}z}{\partial x\partial y^i} + \sum_{i=0}^{n} A_{0i}\frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0$// Lund Univ. Arsskrift.—Bd. 7.—Nr. 3.—pages 1–166.—1911.

[65] *Pisati, Laura.* Sulla estensione del metodo di Laplace alle equazioni differenziali lineari di ordine qualunque con due variabili indipendenti// Rend. Circ. Matem. Palermo.—t. 20.— (1905).—P. 344–374.

[66] *Tilbury D., Murray R., Sastry S.* Trajectory generation for the N-trailer problem using Goursat normal form// In: IEEE Transactions on Automatic Control V. 40(5).—P. 802–819.—1995.

[67] *Tilbury D., Sastry S.* The multi-steering n-trailer system: A case study of Goursat normal forms and prolongations// International Journal of Robust and Nonlinear Control.—V. 5(4).—P. 343–364.— 1995.

[68] *Tsarev S.P.* Generalized Laplace Transformations and Integration of Hyperbolic Systems of Linear Partial Differential Equations// Proc. ISSAC'2005 (July 24–27, 2005, Beijing, China) ACM Press.—2005.—P. 325–331; also e-print cs.SC/0501030 at `http://www.archiv.org/`.

[69] *Tsarev S.P.* On factorization and solution of multidimensional linear partial differential equations// e-print `http://www.archiv.org/`, cs.SC/0609075.

[70] M. van der Put and M.F. Singer. *Galois Theory of Linear Differential Equations.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, V. 328, Springer, 2003.

[71] *Yurov A.V.* Moutard transformations in higher dimensions// *preprint.*—1999.—11 p.

[72] *Zervos P.* Le problème de Monge. *Mémorial des Sci. Math.* Fasc. 53.— Paris.— 1932.— 54 p.

[73] *Zhiber A.V., Startsev S.Ya.* Integrals, Solutions, and Existence Problems for Laplace Transformations of Linear Hyperbolic Systems// Mathematical Notes.—V. 74(5-6).— P. 803–811.—2003.

Содержание

Елена Ивановна Ганжа

Сергей Петрович Царев

Классические методы интегрирования гиперболических систем и уравнений второго порядка

Учебное пособие

Корректор А.В. Кротова

660049, Красноярск, ул. А. Лебедевой, 89.
Редакционно-издательский отдел КГПУ,
т. 22–12–89

Подписано в печать 18.12.07. Формат $60\times84^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 7,38. Заказ . Тираж 150 экз.
Цена свободная